

Олимпиада «Физтех» по математике

2014 год, вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 + x^2 - xy = 1, \\ 2y^3 + x^2 + xy - 2y^2 = 2. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} = \sqrt{3} \left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \operatorname{tg} 2x \right).$$

3. Решите уравнение

$$\log_{2x+9} (2x^2 + 13x + 18) \cdot \log_{x+2} (x^3 + 8) = \log_{2x+9} (2x^2 + 13x + 18) + \log_{x+2} (x^3 + 8).$$

4. Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK , касается отрезка AD и прямой AB . Найдите длину отрезка AB , угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

5. Есть восемь карточек с цифрами 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько существует различных *семизначных* чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

6. Найдите все значения переменной x , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi \sin x}{2\sqrt{2}} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi \sin x}{2\sqrt{2}} \right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{24 + 5x - x^2} + 2x - 8}{x - 4}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH . Известно, что $SH = 2\sqrt{3}$, $AB > BC$, $AB > AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды.

а) Найдите длину ребра AB и угол ACB .

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину C и середину ребра SB , касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответы

1. $(1, 1), (-2, -1), \left(-1 - \sqrt{5}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(-1 + \sqrt{5}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. 5.

4. 2, $2 \operatorname{arctg} 2 = \pi - \arccos \frac{3}{5}, \frac{232}{25}$.

5. 1680.

6. $[-3; 0) \cup (0; \pi) \cup (\pi; 4) \cup \left\{\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, 8\right\}$.

7. $4\sqrt{3}, 90^\circ, 12$.