

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2012/13 год

1. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0$.
2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1/x_2^2 и x_2/x_1^2 . Найдите p .

3. Найдите количество целых значений параметра p , при которых график функции

$$y = x^2 + px + p^2 + 2p - 3$$

пересекает ось X в точках с абсциссами разных знаков.

4. Два лыжника идут друг за другом с постоянной скоростью 6 км/ч, расстояние между ними равно 200 м. Лыжники поднялись на гору, спустились с неё и попали в рыхлый снег, где их скорость стала равна 3 км/ч. Какое расстояние (в метрах) теперь будет между ними?

5. Сколько пар натуральных чисел (x, y) удовлетворяют равенству

$$\text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y) = 2011?$$

6. В треугольнике ABC известно, что $AB > AC$ и $\angle A = 40^\circ$. На стороне AB взяли точку D так, что $BD = AC$. Точка M — середина стороны BC , точка N — середина отрезка AD . Найдите угол BNM .

7. Числа $x, 7, y$ (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Числа $x, 10, y$ (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите $x^2 + y^2$.

8. В озере плавает груша массой 500 г, причём $1/5$ часть её находится над водой. Сверху грушу принимается клевать воробей со скоростью 120 г/мин, а снизу её одновременно начинает поедать карась со скоростью 180 г/мин. В итоге они съедают всю грушу. Сколько грамм груши съест карась?

9. Сколько существует натуральных n таких, что функция

$$f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{10x}{n}$$

имеет период 6π ?

10. При каком наибольшем натуральном n число $n! + 5n + 52$ является точным квадратом?

11. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОД}(m, n) = 1$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(20m + n, 30n + m)$?

12. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{3-x} = 2$.

13. Сколько решений имеет уравнение $\{(x+1)^3\} = \{x^3\}$? Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x .

14. В параллелограмме $ABCD$ известно, что угол между диагоналями AC и BD равен 60° и $AC : BD = 3 : 2$. На сторонах параллелограмма взяли последовательно точки K, L, M и N так, что $KLMN$ — ромб, стороны которого параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площади ромба $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.
15. В большую коробку положили 10 коробок поменьше. В некоторые из них положили 10 коробок ещё поменьше. В некоторые из этих последних коробок положили 10 коробок ещё меньшего размера и так далее. В результате оказалось, что имеется ровно 2000 коробок, в которых что-то лежит. Какое наибольшее число коробок могут при этом быть пустыми?
16. Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?
17. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна 10, а меньшее основание BC равно 5. Биссектриса угла A перпендикулярна отрезку CD , пересекает его в точке K и пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке F . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $EF = 4$.
18. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 19, а сумма их квадратов равна 741. Какое наибольшее значение может принимать сумма их кубов?
19. На обед есть борщ, плов и торт. Мама может съесть весь борщ за 13 минут, весь плов — за 10 минут, а весь торт — за 20 минут. Вовочка кушает гораздо быстрее: весь борщ он может съесть за 6 минут, весь плов — за 8 минут, весь торт — за 10 минут. Вовочка распределил продукты между собой и мамой так, чтобы обед закончился за наименьшее время. Сколько минут они обедали?
20. Тест по английскому языку сдавали 10 школьников. Известно, что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы, а любые четыре школьника ответили вместе не на все вопросы. При каком наименьшем количестве вопросов теста такое могло случиться?

Отвѣты

1. -5.
2. -150,5.
3. 3.
4. 100.
5. 16.
6. 20°.
7. 302.
8. 300.
9. 8.
10. 2.
11. 599.
12. -16.
13. 6.
14. 0,48.
15. 18001.
16. 35.
17. 96.
18. 14689.
19. 14.
20. 210.