

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2011/12 год

1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 540.
2. Вписанная в прямоугольный треугольник окружность делит точкой касания один из катетов на отрезки длины 6 и 7. Найдите длину гипотенузы.
3. Строки клетчатой доски 1001×2012 пронумерованы от 1 до 1001 снизу вверх, а столбцы пронумерованы от 1 до 2012 слева направо. Змейка начинает ползти из левой нижней клетки доски направо. Змейка не может выходить за пределы доски и посещать одну клетку более одного раза. Если змейка не может продолжить движение, она поворачивает налево и далее следует по прямой. Таким образом, змейка пройдёт доску по спирали, побывав в каждой клетке ровно по одному разу. Найдите сумму номеров строки и столбца клетки, в которой змейка закончит движение.
4. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $SB \perp ABC$, $AS = \sqrt{3}$, $SD = \sqrt{7}$, а $\angle SAB = 30^\circ$. Найдите периметр $ABCD$.
5. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором уравнения

$$5x^2 - 11x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - (a + 2)x + a = 0$$

имеют общий корень.

6. Вершины треугольника делят описанную вокруг него окружность на три дуги. Длины отрезков, соединяющих середины двух из этих дуг с серединами хорд, стягивающих эти дуги, равны 2 и 9. Найдите периметр треугольника, если радиус окружности равен 17.
7. Маша и Саша делят между собой ягоды, собранные ими в лесу. Вначале Маша берёт 15 ягод, далее дети берут ягоды по очереди, причём каждый берёт ровно на одну ягоду больше, чем предыдущий. Если количество ягод, которое ребёнок должен взять, превышает количество ягод в куче, он берёт все оставшиеся ягоды. В конце дележа у Маши оказалось 1012 ягод. Сколько ягод было в куче?
8. Площади оснований усечённой пирамиды равны 12 и 75, а высота равна 21. Найдите её объём.
9. «Жигули» и «Москвич» одновременно выехали из посёлка А в город Б. Через 15 минут «Жигулям» оставалось доехать до города Б 40 км, а «Москвичу» — 50 км. Через сколько минут после «Жигулей» приехал в город Б «Москвич», если скорость «Москвича» составляет 60% от скорости «Жигулей»?
10. Какое количество натуральных чисел a обладает следующим свойством: «Наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и a равняется 1200»?
11. Пропускная способность большой трубы на $9 \text{ м}^3/\text{ч}$ больше, чем маленькой трубы. Известно, что 16 маленьких труб могут наполнить бассейн на пять часов быстрее, чем одна большая труба. Найдите, какой наименьший объём (в кубических метрах) может быть у бассейна.

12. Найдите число \overline{ab} , если известно, что число

$$\overbrace{2011 \dots 2011}^{101 \text{ раз}} a \overbrace{2011 b}^{101 \text{ раз}} \overbrace{2011 \dots 2011}^{101 \text{ раз}}$$

делится на 99.

13. Дан треугольник ABC , у которого высота, проведённая к стороне BC , в два раза меньше этой стороны, а высота, проведённая к стороне AC , в 32 раза меньше этой стороны. Найдите синус угла C .

14. В выходные дни в метро пассажиропоток уменьшается на 70%, а интервал между поездами увеличивается на 60%. На сколько процентов среднее количество человек в вагоне метро в выходные дни меньше, чем в рабочие дни?

15. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с третьего, равняется сумме двух предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равняется 2012?

16. Известно, что сумма первых 12 членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, равна 3003, а сумма обратных величин первых 12 членов этой прогрессии равна 1001. Найдите произведение первых 12 членов этой прогрессии.

17. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, две медианы которого равны 3 и 7?

18. Фигура, заданная на координатной плоскости двойным неравенством $0 \leq x^2 + y^2 - 4y \leq 10$, разрезается линиями, задаваемыми уравнением $(x + 2 - y)(\sqrt{3}ax + y - 2) = 0$, на несколько частей. Найдите наибольшее число a , при котором площадь наименьшей части относится к площади наибольшей части как 5 : 7.

19. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 21 равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбит на 441 треугольничков. Назовём *цепочкой* последовательность треугольничков, в которой ни один треугольничек не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное количество треугольничков в такой цепочке?

20. Прямоугольник, составленный из одинаковых квадратных клеток, назовём *чётным*, если он содержит чётное число клеток.

Из одинаковых квадратных клеток составлен прямоугольник длиной 9 клеток и шириной 4 клетки. Сколько в нём содержится чётных прямоугольников?

21. Натуральные числа a , b и c таковы, что

$$\begin{cases} ab + bc + ca + 1,5(a + b + c) = 7039, \\ 2abc - a - b - c = 2008. \end{cases}$$

Найдите наименьшее значение $a + b + c$.

22. Внутри треугольника ABC расположены такие точки D , E и F , что точка D лежит на отрезке AE , точка E лежит на отрезке BF , а точка F лежит на отрезке CD . Известно, что центр окружности Ω , описанной вокруг треугольника ABC , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник DEF . Также дано, что $\angle DEF = 90^\circ$, $DE/EF = 5/3$, радиус окружности Ω равен 6, а отношение площадей $S_{ABC}/S_{DEF} = 12,8$. Найдите DF .

23. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ и прямой круговой цилиндр Z высоты 17, основания которого ограничивают окружности ω_1 и ω_2 . Известно, что вершины A и B лежат на окружности ω_1 , вершины C и D — на окружности ω_2 , а вершина S — на боковой поверхности цилиндра Z и удалена от плоскости окружности ω_2 на расстояние 10. Найдите квадрат радиуса цилиндра.

24. Сколькими способами можно выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

25. При каком наименьшем натуральном $n > 1$ верно утверждение: из любых n натуральных чисел можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 399?

Ответы

1. 2569.
2. 85.
3. 2013.
4. 7.
5. 0,4.
6. 80.
7. 2012.
8. 819.
9. 26.
10. 15.
11. 80.
12. 61.
13. 0,125.
14. На 52%.
15. 396.
16. 729.
17. 14.
18. 1.
19. 421.
20. 300.
21. 2012.
22. 3.
23. 76,5.
24. 7056.
25. 81.