

## Олимпиада «Физтех» по математике

2012 год, вариант 2

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x-5}{x+3} \right) - \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^2}{2} + 4x + 9 \right) \leq 2 \log_4 (x^2 + 5x + 6).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5x}{y} - \frac{9y}{x} + 10 = \frac{6}{xy}, \\ \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} + 4 = \frac{9}{xy}. \end{cases}$$

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны  $a$ .

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\operatorname{ctg} 6x - \operatorname{tg} 5x = \frac{1}{\cos 5x},$$

принадлежащий отрезку  $\left[ \frac{8\pi}{17}; \frac{40\pi}{17} \right]$ .5. В трапеции  $ABCD$  основание  $BC$  равно 5, боковая сторона  $AB$  равна 10. Биссектриса угла  $BAD$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $E$ , а прямую  $BC$  — в точке  $F$ , причём  $AE \perp CD$ ,  $EF = 4$ . Найдите длины отрезков  $AE$  и  $AD$ , а также площадь трапеции.6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например,  $456789 \rightarrow 945678$ ), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка  $[891870; 891899]$  могли получиться в результате сложения?8. На клетчатой доске размера  $22 \times 25$  (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

## Ответы

1.  $(-\infty; -3) \cup [7 + \sqrt{87}; +\infty)$ .
2.  $(1, 1), (-1, -1), (3, -1), (-3, 1)$ .
3. а)  $\frac{8a^3}{9\sqrt{3}}$ ; б)  $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ .
4.  $\frac{21\pi}{34}$ .
5.  $AE = 12, AD = 15, S = 96$ .
6.  $[-1; 3) \cup (3; 7]$ .
7. 891880, 891891.
8. 2556.