

## Олимпиада «Физтех» по математике

2012 год, вариант 1

1. Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x\sqrt{2} + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}} \leq 1.$$

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 6x - 4y - 13, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \leq 8y - 10x + 4a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные  $AC$  и  $BD$ . Их точки касания с меньшей окружностью —  $A$  и  $B$ , с большей окружностью —  $C$  и  $D$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AB = 24/5$ ,  $AC = 12$ .

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например,  $123456 \rightarrow 612345$ ), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка  $[618222; 618252]$  могли получиться в результате вычитания?

6. На ребре  $CC_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  выбрана точка  $M$  так, что центр сферы, описанной около пирамиды  $MAA_1B_1B$ , лежит в грани  $AA_1B_1B$ . Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды  $MABC$ , равен 5, а ребро основания призмы равно  $4\sqrt{3}$ . Найдите:

- отношение объёма пирамиды  $MAA_1B_1B$  к объёму призмы;
- длину отрезка  $MC$ ;
- площадь полной поверхности призмы.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4y^2 - 15xy + 14x^2 + 12y - 24x = 0, \\ \sqrt{x(12 - 7x + 4y) + 36} + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6. \end{cases}$$

8. Найдите количество пар целых чисел  $(a, b)$  таких, что  $1 \leq a \leq 700$ ,  $1 \leq b \leq 700$ , сумма  $a + b$  делится на 7, а произведение  $ab$  делится на 5. (При  $a \neq b$  пары  $(a, b)$  и  $(b, a)$  считаются различными.)

## Ответы

1.  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$ .
2.  $[-5; 2) \cup (2; +\infty)$ .
3.  $-\frac{11}{3}, 3$ .
4. 3 и 12.
5. 618228, 618237, 618246.
6. а)  $2 : 3$ ; б) 6; в)  $144\sqrt{3}$ .
7.  $(-7, -14), (-4, -8)$ .
8. 25200.