

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2010/11 год

1. Находясь в гостях у Кролика, Винни-Пух за первый час съел 40% всего запаса мёда Кролика, а Пятачок и Кролик вместе за это же время съели лишь 300 граммов мёда. За следующий час Винни-Пух съел 80% оставшегося мёда, а Пятачок и Кролик съели 100 граммов мёда на двоих. В итоге у Кролика осталось 800 граммов мёда. Сколько килограммов мёда было у Кролика до визита Винни-Пуха?

2. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{a^2 - ac - ab + bc} + \frac{2}{b^2 - ab - bc + ac} + \frac{1}{c^2 - ac - bc + ab}$$

при $a = 1,67$, $b = 1,71$ и $c = 0,46$.

3. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые не делятся на 17.

4. Найдите последнюю цифру числа $2^{2^{129}}$.

5. Найдите положительное число p , такое, что прямая $y = 4x + p$ и координатные оси образуют треугольник, площадь которого равна 72.

6. В колбе было 230 граммов 60%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в неё столько же воды, чтобы получить 48%-й раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

7. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти её членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

8. Две стороны треугольника равны 34 и 32, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 17. Найдите площадь треугольника.

9. От автостанции в одном направлении выезжают два велосипедиста с интервалом в 2 ч, причём скорость первого равна 30 км/ч, а скорость второго — 20 км/ч. Через 2 ч после выезда второго велосипедиста из того же города выезжает мотоциклист и догоняет второго велосипедиста, а ещё через 3 ч догоняет первого. Какова скорость мотоциклиста (в км/ч)?

10. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2 - xy + 4x - 5y - 5}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^2y - 5x^2 + 10xy + 25x - 50y}{x^3 + 125}$$

при $x = 5,4$ и $y = 2,3$.

11. Известно, что параболы $y = x^2 + bx + c$ и $y = -x^2 + px + q$ пересекаются в точке (1; 1). Проекция вершины второй параболы на ось x на 4 правее, чем проекция вершины первой параболы на эту же ось. Одна из точек пересечения первой параболы с осью x есть (2; 0). Найдите коэффициент q .

12. При каком натуральном значении n числа n , $n + 15$, $46n - 30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

13. Найдите x и y , такие, что выполняется равенство

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = 0.$$

14. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Известно, что $BC = 16$, $CA = 55$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB .

15. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

16. Числа a , b и c таковы, что

$$a + b + c = 13 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 0,4.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

17. Простые числа p , q , r таковы, что $p + q + r = 118$, $pq + qr + rp = 2075$. Найдите pqr .

18. Хорды AB и CD пересекаются в точке X . M — точка пересечения биссектрисы угла BXD с хордой BD . Найдите отрезок BM , если $BD = 27$, а площади треугольников CXB и AXD относятся как $25 : 16$.

19. Сколько различных целых значений принимает функция $17 \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$?

20. Отец и сын катаются на коньках по кругу с постоянными скоростями. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменял направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 9 раз чаще. Во сколько раз отец бежит быстрее сына?

21. Целые числа m и n таковы, что $4m + 5n = mn - 9$. Найдите, какое наибольшее значение может принимать m .

22. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите синус угла между плоскостью $AA_1 C$ и прямой $A_1 B$, если $AA_1 = 9$, $AB = 12$ и $BC = 16$.

23. Найдите наименьшее значение выражения

$$3 \sin^2 \alpha + 7 \cos^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha + 12 \cos^4 \alpha.$$

24. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка $(14; 22)$ содержится внутри (но не границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты — натуральны и меньше, чем 31.

25. Два трёхзначных числа таковы, что сумма остальных трёхзначных чисел ровно в 770 раз больше одного из них. Найдите наибольшее из этих чисел.

26. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 50$, $BC = 21$ и $\cos \angle BAD = 3/5$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD .

27. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} (x - 0,3)^2 \leq 440, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

28. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 13$, $BC = 15$. Высота пирамиды имеет длину 6, а основание высоты попадает на прямую BC . Найдите площадь плоского сечения, проходящего через точку A параллельно прямой BC и делящего высоту пирамиды в отношении $3 : 2$, считая от вершины S .

29. Найдите наибольшее натуральное n , для которого число $6500!$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

30. В Городском Собрании 24 депутата. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причём известно, что каждый дружит ровно с 7 другими. Каждые три депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.

Отвѣты

1. 8.

2. 20.

3. 15355.

4. 2.

5. 24.

6. 46.

7. 20.

8. 480.

9. 60.

10. 0,21.

11. -10.

12. 3.

13. $x = -1,5$, $y = 0,25$.

14. 49.

15. 1200; 2970.

16. 2,2.

17. 3686.

18. 15.

19. 32.

20. 1,25.

21. 34.

22. 0,64.

23. 9,2.

24. 30576.

25. 641.

26. 30,75.

27. 22.

28. 18.

29. 82.

30. 680.