

Олимпиада «Физтех» по математике

2011 год, вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2y} = 3y - x, \\ \frac{81}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x - 2) + \log_{(\operatorname{ctg} x - 2)} \sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{10 - 2|x|}{|x^2 + 9x + 11| - 3} \leq 1.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF , проведённую к стороне BC , и длину отрезка CD . Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

5. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых существует число α , такое, что уравнение

$$x^2 + (\sin \alpha + 3 \cos \alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB , SC и BC . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC , а также радиус сферы.

Ответы

1. $(-1, 0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{113}-9}{2}, \frac{3\sqrt{113}-29}{9}\right)$.
2. $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) + \pi k$, $\operatorname{arctg} \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(-\infty; -8) \cup (-7; -3] \cup (-2; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{129}-11}{2}; +\infty\right)$.
4. $DF = 8/25$, $CD = 24/21$, $S = 16/25$.
5. $(-\infty; \frac{5}{2}]$.
6. $\rho(O, BSC) = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{33}{5}}$, $\rho(O, ABC) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{11}{3}}$, $R = \frac{3\sqrt{15}}{14}$.