

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2012/13 год

1. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0$.
2. В семье Ивановых четыре человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход семьи возрастёт на 10%. Если маме удвоят зарплату, то общий доход возрастёт на 35%. Если папе удвоят зарплату, то общий доход возрастёт на 40%. На сколько процентов возрастёт доход семьи, если дедушке удвоят пенсию?
3. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1/x_2^2 и x_2/x_1^2 . Найдите p .

4. Найдите количество целых значений параметра p , при которых график функции

$$y = x^2 + px + p^2 + 2p - 3$$

пересекает ось X в точках с абсциссами разных знаков.

5. Даны положительные рациональные числа a , b и c . Известно, что число b больше числа a на k , а число c больше числа b на 69; при этом число b больше числа a на 69%, а число c больше числа b на $k\%$. Чему равно c ?
6. Найдите две последние цифры числа 7^{1111} .
7. Сколько пар натуральных чисел (x, y) удовлетворяют равенству

$$\text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y) = 2011 ?$$

8. Отрезок BD — медиана равнобедренного треугольника ABC . Окружность радиуса 4 проходит через точки A , B и D и пересекает сторону BC в точке E такой, что $BE : BC = 7 : 8$. Найдите периметр треугольника ABC .
9. Числа x , 7, y (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Числа x , 10, y (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите $x^2 + y^2$.
10. Вершины 1000-угольника последовательно занумеровали числами от 1 до 1000 и принялись закрашивать каждую 15-ю вершину: сначала первую, потом 16-ю, потом 31-ю и так далее. Процесс продолжается до тех пор, пока можно закрашивать новые вершины. Сколько вершин останутся в итоге незакрашенными?
11. В озере плавает груша массой 500 г, причём $1/5$ часть её находится над водой. Сверху грушу принимается клевать воробей со скоростью 120 г/мин, а снизу её одновременно начинает поедать карась со скоростью 180 г/мин. В итоге они съедают всю грушу. Сколько грамм груши съест карась?
12. При каком наибольшем натуральном n число $n! + 5n + 52$ является точным квадратом?
13. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{3-x} = 2$.

14. В параллелограмме $ABCD$ известно, что угол между диагоналями AC и BD равен 60° и $AC : BD = 3 : 2$. На сторонах параллелограмма взяли последовательно точки K, L, M и N так, что $KLMN$ — ромб, стороны которого параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площади ромба $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.
15. В большую коробку положили 10 коробок поменьше. В некоторые из них положили 10 коробок ещё поменьше. В некоторые из этих последних коробок положили 10 коробок ещё меньшего размера и так далее. В результате оказалось, что имеется ровно 2000 коробок, в которых что-то лежит. Какое наибольшее число коробок могут при этом быть пустыми?
16. Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?
17. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна 10, а меньшее основание BC равно 5. Биссектриса угла A перпендикулярна отрезку CD , пересекает его в точке K и пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке F . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $EF = 4$.
18. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 19, а сумма их квадратов равна 741. Какое наибольшее значение может принимать сумма их кубов?
19. На обед есть борщ, плов и торт. Мама может съесть весь борщ за 13 минут, весь плов — за 10 минут, а весь торт — за 20 минут. Вовочка кушает гораздо быстрее: весь борщ он может съесть за 6 минут, весь плов — за 8 минут, весь торт — за 10 минут. Вовочка распределил продукты между собой и мамой так, чтобы обед закончился за наименьшее время. Сколько минут они обедали?
20. Тест по английскому языку сдавали 10 школьников. Известно, что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы, а любые четыре школьника ответили вместе не на все вопросы. При каком наименьшем количестве вопросов теста такое могло случиться?

Отвѣты

1. -5 .
2. На 15%.
3. $-150,5$.
4. 3.
5. 199.
6. 43.
7. 16.
8. 20.
9. 302.
10. 800.
11. 300.
12. 2.
13. -16 .
14. 0,48.
15. 18001.
16. 35.
17. 96.
18. 14689.
19. 14.
20. 210.