

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2010/11 год

1. Находясь в гостях у Кролика, Винни-Пух за первый час съел 40% всего запаса мёда Кролика, а Пятачок и Кролик вместе за это же время съели лишь 300 граммов мёда. За следующий час Винни-Пух съел 80% оставшегося мёда, а Пятачок и Кролик съели 100 граммов мёда на двоих. В итоге у Кролика осталось 800 граммов мёда. Сколько килограммов мёда было у Кролика до визита Винни-Пуха?

2. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти её членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2 - xy + 4x - 5y - 5}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^2y - 5x^2 + 10xy + 25x - 50y}{x^3 + 125}$$

при  $x = 5,4$  и  $y = 2,3$ .

4. Известно, что параболы  $y = x^2 + bx + c$  и  $y = -x^2 + px + q$  пересекаются в точке  $(1; 1)$ . Проекция вершины второй параболы на ось  $x$  на 4 правее, чем проекция вершины первой параболы на эту же ось. Одна из точек пересечения первой параболы с осью  $x$  есть  $(2; 0)$ . Найдите  $q$ .

5. На доске выписали в порядке возрастания все натуральные числа от 1 до 10000, а потом стёрли те, которые не делятся ни на 4, ни на 15. Какое число оказалось на 2017-м месте?

6. Две стороны треугольника равны 34 и 32, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 17. Найдите площадь треугольника.

7. При каком натуральном значении  $n$  числа  $n$ ,  $n + 15$ ,  $46n - 30$  являются последовательными членами геометрической прогрессии?

8. Два велосипедиста выезжают навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 240 километров. Если первый выедет на 4,5 часа раньше второго, то он встретит второго велосипедиста через 7,5 часа после своего выезда. Если второй выедет на 1 час раньше первого, то он встретит первого велосипедиста через 6 часов после своего выезда. С какой скоростью (в км/ч) едет каждый велосипедист?

9. Сколько различных целых значений принимает функция  $17 \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ ?

10. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

11. Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что

$$a + b + c = 13 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 0,4.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

12. Простые числа  $p, q, r$  таковы, что  $p + q + r = 118$ ,  $pq + qr + rp = 2075$ . Найдите  $pqr$ .
13. На сторонах  $AB, BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  отмечены соответственно точки  $D, E$  и  $F$  так, что прямая  $DF$  параллельна стороне  $BC$ . Найдите площадь четырёхугольника  $ADEF$ , если площади треугольников  $ABC$  и  $ADF$  равны 150 и 6 соответственно.
14. Отец и сын катаются на коньках по кругу с постоянными скоростями. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменял направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 9 раз чаще. Во сколько раз отец бежит быстрее сына?
15. Найдите наименьшее значение выражения

$$3 \sin^2 \alpha + 7 \cos^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha + 12 \cos^4 \alpha.$$

16. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка  $(14; 22)$  содержится внутри (но не границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты — натуральны и меньше, чем 31.
17. Найдите натуральное число, которое ровно в 25 раз меньше, чем сумма всех натуральных чисел, меньших его и делящихся на 31.
18. В основании пирамиды  $SABC$  лежит треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 4$ ,  $AC = 13$ ,  $BC = 15$ . Высота пирамиды имеет длину 6, а основание высоты попадает на прямую  $BC$ . Найдите площадь плоского сечения, проходящего через точку  $A$  параллельно прямой  $BC$  и делящего высоту пирамиды в отношении 3 : 2, считая от вершины  $S$ .
19. Найдите наибольшее натуральное  $n$ , для которого число  $6500!$  делится на каждое из чисел  $k^k$  при  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .
20. 26 солдат выстроены в одну шеренгу. Сколько существует различных способов выбрать 11 из них так, что никакие двое из них не стоят рядом?

## Отвѣты

1. 8.
2. 20.
3. 0,21.
4.  $-10$ .
5. 6724.
6. 480.
7. 3.
8. 24; 20.
9. 32.
10. 1200; 2970.
11. 2,2.
12. 3686.
13. 30.
14. 1,25.
15. 9,2.
16. 30576.
17. 1581.
18. 18.
19. 82.
20. 4368.