

## Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2016/17 год

1. Найдите наименьшее натуральное  $a$  такое, что выражение  $a(a + 12)(a + 24)(a + 36)(a + 48)$  делится на  $10^6$ .

62422

2. Известно, что для положительных чисел  $a, b, c$  каждое из трёх уравнений

$$ax^2 + 20bx + c = 0, \quad bx^2 + 20cx + a = 0, \quad cx^2 + 10ax + b = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень. Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно 11? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня.)

11.0

3. Обозначим через  $S(k)$  сумму цифр числа  $k$ . Пусть  $n$  — наименьшее натуральное число такое, что  $S(n) + S(n + 61) = 4000$ . В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа  $n + 61$ , а последние три — с последними тремя цифрами числа  $n + 61$ . Например, если  $n + 61 = 1234567890$ , то в ответ нужно записать число 12890.

69669

4. Пусть  $AC$  — наибольшая сторона треугольника  $ABC$ . На отрезке  $AC$  выбраны точки  $K$  и  $M$  так, что  $AM = AB$  и  $CK = CB$ . Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника  $KBM$ , равен 13, радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , равен 11, и эта окружность касается стороны  $BC$  в точке  $T$ . Найдите квадрат длины отрезка  $BT$ .

48

5. Пусть  $a, b, c$  — различные натуральные числа с суммой 1330. Найдите максимально возможное значение суммы корней уравнения  $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$ .

1328.5

6. Найдите натуральное число  $n$ , для которого выполняется равенство

$$\frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2439}{2639}.$$

28

7. Найдите наименьшее значение параметра  $p$ , для которого при всех  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 4$  выполняется неравенство  $xyz + p \geq 11x + 4y + 2z$ .

61

8. Из карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 составляются натуральные числа, делящиеся на 36. Сколькими способами это можно сделать? (некоторые карточки при составлении чисел можно не использовать, число не может начинаться на 0).

871

9. Вася вырезал из волейбольной сетки кусок  $35 \times 35$  ячеек. Петя красит эту сетку следующим образом. Он выбирает любой квадрат (из ячеек сетки) и красит его границу. Какое наименьшее число квадратов он должен покрасить, чтобы вся сетка оказалась покрашенной? Выбираемый квадрат может быть любого размера. Разрешается красить куски сетки несколько раз.

89

10. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  отмечена точка  $F$ . Оказалось, что  $AB = BF$  и  $FC = CD$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABF$ ,  $FCD$ ,  $BFC$  равны 2, 5 и 4 соответственно. Найдите отношение  $AF : FD$ .

0.2