

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2016/17 год

1. Найдите наименьшее натуральное a такое, что выражение $a(a + 16)(a + 32)(a + 48)(a + 64)$ делится на 10^7 .

312436

2. Известно, что для положительных чисел a, b, c каждое из трёх уравнений

$$ax^2 + 10bx + c = 0, \quad bx^2 + 10cx + a = 0, \quad cx^2 + 10ax + b = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень. Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно 9? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня.)

980

3. Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых шести её членов равно 40^{612} . Найдите количество таких прогрессий.

13021301

4. Пусть

$$\frac{16 \sin^2 x - 21 - 8\sqrt{7} \cos x}{27 - 16 \cos^2 x - 24 \sin x} = 1.$$

Какое наибольшее значение может принимать $5 \sin x$?

3.75

5. Даны парабола $y = 4x^2$ и прямая $y = x - 0,5$. Какую наибольшую площадь может иметь квадрат, две вершины которого лежат на параболе, а две другие — на этой прямой?

6.125

6. Две окружности Ω и ω радиусов $R = 13,25$ и $r = 9$ касаются внутренним образом. Хорда AB окружности Ω касается окружности ω в точке C . Найдите длину хорды AB , если известно, что $AC : CB = 1 : 2$.

22.5

7. Найдите наименьшее значение параметра p , для которого при всех $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 7$ выполняется неравенство $xyz + p \geq 19x + 7y + 2z$.

33

8. Какое наибольшее значение может принимать модуль синуса суммы углов, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{20}{9} \cos y, \\ \operatorname{tg} y = \frac{20}{9} \cos z, \\ \operatorname{tg} z = \frac{20}{9} \cos x? \end{cases}$$

8'0

9. Треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) обладает следующими свойствами:

1) длины проекций боковых рёбер на плоскости боковых граней, не содержащих эти рёбра (то есть проекция ребра SA на плоскость грани SBC , и так далее) — равны между собой;

2) длины проекций боковых рёбер на плоскость основания пирамиды также равны между собой.

Известно, что $\cos \angle ASB = -\frac{15}{17}$, $AB = 6$. Найдите сумму периметров оснований всех пирамид, обладающих указанными свойствами.

9'5

10. В некотором государстве 35 городов. Каждая пара городов соединена авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Оказалось, что из каждого города выходит ровно 12 авиарейсов первой авиакомпании. Назовем тройку городов A, B, C *замкнутой*, если все три авиарейса AB, BC, CA осуществляются одной авиакомпанией. Каково наибольшее возможное количество замкнутых троек городов может быть в этом государстве?

19'25