

## Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2016/17 год

1. Обозначим через  $S(k)$  сумму цифр числа  $k$ . Пусть  $n$  — наименьшее натуральное число такое, что  $S(n) + S(n + 61) = 4000$ . В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа  $n + 61$ , а последние три — с последними тремя цифрами числа  $n + 61$ . Например, если  $n + 61 = 1234567890$ , то в ответ нужно записать число 12890.

69669

2. Пусть  $AC$  — наибольшая сторона треугольника  $ABC$ . На отрезке  $AC$  выбраны точки  $K$  и  $M$  так, что  $AM = AB$  и  $CK = CB$ . Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника  $KBM$ , равен 10, радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , равен 9, и эта окружность касается стороны  $BC$  в точке  $T$ . Найдите квадрат длины отрезка  $BT$ .

61

3. Пусть  $a, b, c$  — различные натуральные числа с суммой 1060. Найдите максимально возможное значение суммы корней уравнения  $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$ .

1058.5

4. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  отмечена точка  $F$ . Оказалось, что  $AB = BF$  и  $FC = CD$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABF$ ,  $FCD$ ,  $BFC$  равны 2, 5 и 4 соответственно. Найдите отношение  $AF : FD$ .

7.0

5. В некотором государстве 40 городов. Каждая пара городов соединена авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Оказалось, что из каждого города выходит ровно 6 авиарейсов первой авиакомпании. Назовем тройку городов  $A, B, C$  *замкнутой*, если все три авиарейса  $AB, BC, CA$  осуществляются одной авиакомпанией. Каково наибольшее возможное количество замкнутых троек городов может быть в этом государстве?

5920

6. Найдите наименьшее значение параметра  $p$ , для которого при всех  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 4$  выполняется неравенство  $xyz + p \geq 11x + 4y + 2z$ .

61

7. Пусть

$$\frac{21 - 16 \sin^2 x + 8 \cos x}{16 \cos^2 x - 29 - 8\sqrt{15} \sin x} = 2.$$

Какое наибольшее значение может принимать  $7 \cos x$ ?

-1.75

8. Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых шести её членов равно  $72^{612}$ . Найдите количество таких прогрессий.

2542;2541

9. Известно, что для положительных чисел  $a, b, c$  каждое из трёх уравнений

$$ax^2 + 15bx + c = 0, \quad bx^2 + 15cx + a = 0, \quad cx^2 + 15ax + b = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень. Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно 27? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня.)

0.48

10. Найдите наименьшее натуральное  $a$  такое, что выражение  $a(a + 12)(a + 24)(a + 36)(a + 48)$  делится на  $10^6$ .

62452