

## Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2015/16 год

1. Сколько существует пар натуральных чисел  $x > y$  таких, что их произведение на 19999 больше их суммы?

15

2. Найдите сумму действительных корней всех квадратных трёхчленов вида  $y = x^2 + px + 122$ , где  $p$  принимает все целые значения от  $-35$  до  $17$ .

378

3. В параболу  $y = 0,5x^2$  вписан прямоугольный треугольник (то есть все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси  $Ox$ . Какую наибольшую длину может иметь высота этого треугольника, опущенная на гипотенузу?

2

4. Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в которых цифры 9, 7, 3, 1, 0 используются ровно по одному разу. Найдите среднее арифметическое этих чисел. Ответ округлите до целого.

54166

5. Набор чисел  $a, b, c$  каждую секунду заменяется на  $a + b - c, b + c - a, c + a - b$ . В начале имеется набор чисел 1000, 987, 998. Через некоторое время получился набор 4067, 6115,  $x$ . Какое наибольшее значение может принимать  $x$ ?

-7197

6. Лабиринт представляет из себя цепочку из 7 комнат. Из первых 4 комнат в следующие ведут 2 двери, из оставшихся в следующую ведут 3 двери (из последней комнаты 3 двери ведут на выход). Лаборант случайным образом запер 10 дверей. Какова вероятность того, что крыса, посаженная в первую комнату, сможет выбраться из лабиринта? Ответ выразите в процентах и округлите до десятых.

2,2

7. В некоторой стране 65 городов. Известно, что в любых 30 городах проживает не менее чем 21% жителей страны. Какой наибольший процент жителей этой страны может проживать в столичном городе?

55,2

8. Точка  $D$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $DE$  и  $DF$  — биссектрисы треугольников  $ABD$  и  $CBD$ . Отрезки  $BD$  и  $EF$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите отрезок  $DM$ , если  $EF = 6$ .

3

9. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 3$  и  $BC = 14$ . Построим треугольник  $A_1B_1C_1$ , последовательно переместив точку  $A$  на некоторое расстояние параллельно отрезку  $BC$  (точка  $A_1$ ), затем точку  $B$  — параллельно отрезку  $A_1C$  (точка  $B_1$ ) и, наконец, точку  $C$  — параллельно отрезку  $A_1B_1$  (точка  $C_1$ ). Чему равна длина отрезка  $B_1C_1$ , если оказалось, что угол  $A_1B_1C_1$  прямой и  $A_1B_1 = 2$ ?

12

10. На плоскости проведены 3 семейства по 6 прямых трёх разных направлений, причём прямые различных направлений пересекаются. Какое наибольшее количество ограниченных областей вырезают они из плоскости?

16

11. В депо три пути для формирования составов. Пути расположены с севера на юг. На пути №1 стоит состав из 25 вагонов. За одну операцию маневрирования тепловоз может перевезти один вагон с любого пути на любой другой путь. Причём он может брать и ставить вагоны только с одной (южной) стороны. За какое наименьшее количество операций тепловоз сможет собрать все вагоны на пути №1 в порядке, обратном исходному?

18