

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2015/16 год

1. В классе 13 мальчиков и 16 девочек. К Новому Году учительница раздала ребятам конфеты (каждому хотя бы по одной), причём всем мальчикам досталось поровну конфет, и всем девочкам досталось поровну конфет. Оказалось, что существует лишь один способ раздачи (так, чтобы раздать все конфеты). Какое наибольшее число конфет могло быть у учительницы?

417

2. Среднее арифметическое шестнадцати различных натуральных чисел равно 21. Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

29

3. Найдите сумму действительных корней всех квадратных трёхчленов вида $y = x^2 + px + 82$, где p принимает все целые значения от -11 до 31 .

-328

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки N и M . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площади треугольников ANP , CMP и CPA равны соответственно 8, 10 и 9.

2907

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AD = 12$, $AB = 7$, $AA_1 = 7$. Внутри параллелепипеда расположена сфера, касающаяся трёх граней с вершиной A и касающаяся диагонали $B_1 D$. Найдите радиус сферы.

2,8

6. На плоскости проведены 3 семейства по 7 прямых трёх разных направлений, причём прямые различных направлений пересекаются. Какое наибольшее количество ограниченных областей вырезают они из плоскости?

127

7. Найти наибольшее значение выражения $x^3 y - 3y^2 x^2$, если $0 \leq x \leq 3$ и $0 \leq y \leq 3$.

6,75

8. Даны правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$ и конус, вершина которого лежит в точке A , а окружность основания проходит через точки B_1 и C_1 . Известно, что точки B и C лежат на боковой поверхности конуса. Найдите угол между образующей конуса и его высотой, если $AB = 1$, $AB_1 = 5$. В ответ запишите квадрат тангенса найденного угла.

1

9. В клубе собрались 12 путешественников. Когда зашёл разговор о стране N , оказалось, что вместе любые 7 путешественников побывали во всех городах страны N (то есть каждый город посетил хоть один из этих 7 путешественников), а любые 6 — нет (то есть найдётся город, в котором не был ни один из этих 6 путешественников). При каком минимальном количестве городов в стране N это могло быть?

126

10. В депо три пути для формирования составов. Пути расположены с севера на юг. На пути №1 стоит состав из 25 вагонов. За одну операцию маневрирования тепловоз может перевезти один вагон с любого пути на любой другой путь. Причём он может брать и ставить вагоны только с одной (южной) стороны. За какое наименьшее количество операций тепловоз сможет собрать все вагоны на пути №1 в порядке, обратном исходному?

12

11. Пусть $f(n)$ — целое число, ближайшее к числу \sqrt{n} . Обозначим $g(n) = \frac{1}{f(n)}$. Найдите сумму

$$g(211) + g(212) + \dots + g(2025).$$

19