

## Открытая олимпиада Физтех-лицея 2015

## Математика, 6 класс

1. Сколько существует чётных натуральных чисел, меньших 10000, у которых количество цифр чётно?

4545

2. В преддверии хоккейного матча «Метеор» — «Вымпел» стала известна информация о купленных билетах. На южную трибуну было продано более  $7/11$  билетов, на северную — более 10% билетов, на западную — более  $5/9$  билетов, а на восточную трибуну билетов не продавали. Какое наименьшее число билетов могло быть продано на матч?

609

3. В сломанной повозке лошадь, идущая слева, устаёт через 60 км бега, а лошадь, идущая справа, — через 90 км. Через сколько километров после начала движения нужно поменять лошадей местами, чтобы они устали одновременно?

36

4. Сколькими способами можно выбрать из 12 человек группу для участия в эксперименте, состоящую из по крайней мере одного человека (в группе может быть любое число человек от 1 до 12)?

4095

5. На острове живет 25 человек: рыцари, лжецы и хитрецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а хитрецы отвечают на заданные им вопросы по очереди то правду, то ложь. Все жителям острова было задано три вопроса: «Вы рыцарь?», «Вы хитрец?», «Вы лжец?». На первый вопрос «Да» ответили 21 человек, на второй — 17 человек, на третий — 9 человек. Сколько хитрецов живет на этом острове?

13

6. Средний возраст одиннадцати футболистов — 28 лет. Во время игры один из игроков был удалён и средний возраст оставшихся игроков стал 27 лет. Сколько лет удалённому игроку?

38

7. В классе несколько детей, которые ходят в кружки. В каждый кружок ходит ровно 12 учеников. Каждый из учеников ходит ровно в 2 кружка. Для любых двух кружков ровно один ученик посещает оба этих кружка. Сколько учеников в классе?

78

8. Пусть  $N$  — наименьшее натуральное число, которое дает различные остатки от деления на 2, 4, ..., 2014. Какой остаток число  $N$  дает при делении на 2014?

2012

9. Два бегуна тренируются на круговом стадионе. Они стартуют с диаметрально противоположных точек, и время от времени один из них обгоняет другого. Известно, что третий обгон произошёл после часа с начала тренировки. Через какое количество минут после третьего случился шестой обгон?

72

10. В понедельник в школьную библиотеку пришло 9 учеников, во вторник — 5, в среду — 4, в четверг — 6, в пятницу — 7. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

14

11. Есть колода карточек, пронумерованных от 1 до 2000. Эту колоду перемешали и теперь играют в игру. Каждый шаг этой игры состоит из двух действий:

- 1) верхнюю карту кладём вниз колоды;
- 2) ту карту, которая после первого действия стала верхней, перекладываем вниз другой колоды (изначально другая колода пустая).

Оказалось, что после игры карты во второй колоде расположились следующем порядке: 1, 2, 3, 4, ..., 2000. Какая карта лежала сверху первой колоды в самом начале?

8361

12. Трое мальчиков собрались вместе поехать на велосипедах из города на пляж. Но у них есть только два велосипеда. За какое наименьшее число минут все трое смогут попасть на пляж, если до пляжа 54 км, а они могут передвигаться пешком или велосипеде с одинаковыми скоростями каждый: 24 км/ч на велосипеде и 8 км/ч пешком?

225

13. В новый набор к командиру корабля пришло служить 18 матросов. После отплытия оказалось, что каждый матрос знаком с разным числом человек на корабле. Сколько матросов знал командир корабля?

6

14. Известно, что  $x = 250 + a - b$ ,  $y = 250 + b - c$  и  $z = 250 + c - a$  — три последовательных натуральных числа (здесь  $a, b, c$  — некоторые натуральные числа). Найдите наибольшее из чисел  $x, y$  и  $z$ .

251

15. Найдите сумму всех натуральных  $n$ , таких, что  $n \leq 2014$  и  $\text{НОК}(256, n) = 256 \cdot n$ .

1014049

16. Малыш Федя расставляет по кругу натуральные числа от 1 до 400. За каждое число, которое больше суммы двух соседей, он получает конфету. Какое наибольшее количество конфет может получить Федя?

002

17. Из посёлка  $A$  в посёлок  $F$  ведёт прямолинейная дорога длиной 35 км. На ней в посёлках  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  расположены автобусные остановки (в указанном порядке). Известно, что  $AC = 12$  км,  $BD = 11$  км,  $CE = 12$  км и  $DF = 16$  км. Найдите расстояние  $AB$ .

8

18. Индейцы племени Мат-и-матика умели разрезать квадрат на прямоугольники особым образом. Они разрезали его так, чтобы любая вертикальная и горизонтальная прямая, не содержащая сторон прямоугольников разрезания, пересекала ровно 40 прямоугольников. На какое наименьшее число прямоугольников индейцы могли разрезать квадрат?

151

19. В каждую клетку таблицы  $9 \times 9$  ставят 0 или 1. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце была чётной?

18446744073709551616

20. Число  $N$  равно произведению 200 простых чисел (не обязательно различных). Если каждый множитель в этом представлении увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на  $N$ . Сколько различных таких натуральных  $N$  существует?

34