

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2019 год, вариант 2

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 2$.

9Z^A

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 2xy = 11, \\ 2x^2y + xy^2 = 15. \end{cases}$$

(1; 2/3) ; (2; 5/3) ; (3; 1) ; (5; 1/3)

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 10. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P , причем $DP = 3$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L . Найдите отношение $AL : LC$.

ε1 : ε = OT : TV

4. Есть 306 различных карточек с числами $3, 19, 3^2, 19^2, \dots, 3^{153}, 19^{153}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

8ZεZ1

5. В окружность Ω радиуса 10 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 16$, $BC = 12$.

ε/1 или 0ε/6F

6. При каких значениях параметра a среди уравнений неравенства $(x^2 - ax - x + a)\sqrt{x+5} \leq 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

(∞+; ε] ∩ [1-; ∞-) ∋ v

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geq |x + y|, \\ \frac{x^2 - 6x + y^2 - 8y}{3y - x + 6} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

□