

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 2

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

92^

2. Известно, что

$$\frac{\cos 3x}{(2 \cos 2x - 1) \cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x + y) \quad \text{и} \quad \frac{\sin 3x}{(2 \cos 2x + 1) \sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2(x + y).$$

Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 3y)$, если известно, что их не менее двух.

5 или 1-

3. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \dots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

806793

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P . Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L , причём $AL : LC = 2 : 3$.

а) Найдите AP .

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ACP . Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP .

607 = 0AV^S, 7-60^ = LJ (0; 8 = AV (a)

5. Решите неравенство

$$\log_{1+x^2} (1 + 27x^5) + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + x^2) \leq 1 + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + 27x^5).$$

{5} \cap (\frac{2}{2} \wedge 0) \cap (0; \frac{2}{2} \wedge -) \cap [\frac{5}{1} -; \frac{2}{1} -) \ni x

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

$$\boxed{z \ni u \text{ арл } ; \frac{z}{u \sqrt{z}} + \frac{01}{x} ; \frac{z}{u \sqrt{z}} + \frac{z}{1^2} \text{ арл ар } \frac{z}{z} \mp \frac{01}{x} = v}$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 — равносторонний. На ребре CC_1 перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M .

а) Найдите длину ребра AB .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1 , а также длину ребра A_1C_1 .

$$\boxed{\text{a) } AB = \sqrt{15}; \text{ б) } \angle(C C_1, A B A_1) = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{1}, A_1 C_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}}$$