

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 1

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3 - 2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6 - a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A , B , C и D , при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

8
1

2. Известно, что

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{x + y}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}.$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x + y)$, если известно, что их менее трёх.

88
71 или 88
71

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, ..., 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

1191928

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F , а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B . Прямая ℓ проходит через точку B , вторично пересекает окружность ω в точке C , а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F , пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

HP = 96, r = 138, R = 222

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}} (1 + 4x^2) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}} (1 - 4x^2) + 1 \right) \log_{1-16x^4} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6} \right) \geq 1.$$

$[\frac{5}{1}; 0) \cap (0; \frac{11}{1}) \cap (\frac{6}{1}; \frac{5}{1}] \cap [\frac{5}{1}; \frac{7}{1}) \ni x$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек — начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b , при которых описанная конфигурация возможна.

12
25 = b

7. На рёбрах AC , BC , BS , AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K , L , M , N соответственно. Известно, что точки K , L , M , N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2 , причём окружность Ω_1 касается сторон KN , KL и LM , а окружность Ω_2 касается сторон KN , LM и MN . Прямые круговые конусы \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса \mathcal{F}_1 лежит на ребре AB , а вершина Q конуса \mathcal{F}_2 лежит на ребре CS .

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ .

$$\frac{3}{25} = \sin \alpha \quad \left(\frac{9}{1} \cos \alpha = \sqrt{13} \right) \quad \alpha$$