

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 10 класс, 2019 год, вариант 1

1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - 2ax + 3$ ,  $f_2(x) = x^2 + x + b$ ,  $f_3(x) = 3x^2 + (1 - 4a)x + 6 + b$  и  $f_4(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x + 3 + 2b$ . Пусть разности корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|A| \neq |B|$ . Найдите отношение  $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.

8  
1

2. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \sqrt{21 - x^2 - 4x} \quad \text{и} \quad g(x) = |x + 2|$$

определены, причём  $\min(f(x); g(x)) > \frac{x+4}{2}$ .

$$(\sqrt{21 - x^2 - 4x}) \cap (|x + 2|) \ni x$$

3. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно  $\frac{48}{7}$ , а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно  $\frac{144}{17}$ .

$$\frac{b}{1} = b \cdot 8 \neq 1q$$

4. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$ , ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $C$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$  так, что  $CE = 9$ ,  $ED = 7$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .

$$R = 6, S_{ABCD} = 96 + 24\sqrt{7}$$

5. На столе лежат 140 различных карточек с числами  $3, 6, 9, \dots, 417, 420$  (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

0681

6. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| + |5 - x| \leq 4, \\ \frac{x^2 - 6x + 2y + 7}{y + x - 4} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите её площадь.

4

7. Окружности  $\omega$  и  $\Omega$  касаются внешним образом в точке  $F$ , а их общая внешняя касательная касается окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $\ell$  проходит через точку  $B$ , вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $C$ , а также пересекает  $\omega$  в точках  $D$  и  $E$  (точка  $D$  расположена между  $C$  и  $E$ ). Общая касательная окружностей, проходящая через точку  $F$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BE$  в точках  $P$  и  $H$  соответственно (точка  $H$  лежит между точками  $P$  и  $F$ ). Известно, что  $BC = 60$ ,  $DH = HC = 2$ . Найдите длину отрезка  $HP$  и радиусы обеих окружностей.

$$HP = 8, r = 6\sqrt{31}, R = \frac{5}{36}\sqrt{465}$$