Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2004 год, вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 3} \geqslant 0.$$

$x \in [-6; -4] \cup [4; 6]$

2. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x} = \frac{|\cos 6x|}{\cos 2x}.$$

$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3. Четырехугольник, один из углов которого равен $\operatorname{arctg}(4/3)$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{6}$ и описан около окружности радиуса 1. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями.

$57;\ \arcsin\frac{19}{20}$

4. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1, середину ребра AD и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.

$\frac{7\sqrt{17}}{24};\ 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_7\left(7^x - \log_7 a\right) = 2x$$

имеет единственное решение.

$a = \sqrt[4]{7},\ 0 < a \leqslant 1$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2x-y)^2 = 4 + z^2, \\ (z-y)^2 = 2 + 4x^2, \\ (z+2x)^2 = 3 + y^2. \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{12}; -1; \frac{5}{6}\right),\ \left(-\frac{7}{12}; 1; -\frac{5}{6}\right)$