

Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2019 год

1. Петя и Вася участвовали в выборах на должность президента шахматного клуба. К полудню у Пети было 25% голосов, а у Васи — 45%. После полудня на голосование приходили только друзья Пети (и, соответственно, голосовали только за него). В итоге у Васи осталось только 27% голосов. Сколько процентов голосов набрал Петя?

55%

2. Найдите все такие пары натуральных чисел m и n , что $m^{2019} + n$ делится на mn .

3. По кругу лежат 100 пирожков, из них 53 с капустой, а остальные — с рисом. Алексей знает, какие из них с чем, и хочет выбрать 67 подряд лежащих пирожков так, чтобы среди них было ровно k с капустой. При каких k ему это гарантированно удастся сделать независимо от расположения пирожков? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

98 или 99

4. Про положительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+x+y} = 1.$$

Какие значения может принимать произведение xy ? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

1

5. Определите количество возможных значений произведения $a \cdot b$, где a, b — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$2019^2 \leq a \leq b \leq 2020^2.$$

6182918

6. В тетраэдре $ABCD$ выполнены равенства:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD, \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Докажите, что центр описанной сферы тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD .