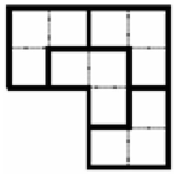
Замощения плитками

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.3, 7–8.4, 9.2*) Сложить квадрат наименьшей площади из квадратиков размера 1×1, 2×2 и 3×3 так, чтобы количество квадратиков каждого размера было одинаковым.

2. (*Турнир городов, 2012, 8–9*) Из клетчатого прямоугольника 9×9 вырезали 16 клеток, у которых номера горизонталей и вертикалей четные. Разрежьте оставшуюся фигуру на несколько клетчатых прямоугольников так, чтобы среди них было как можно меньше квадратиков 1×1.

3. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток — выдающийся многоугольник (см. рисунок).



а) Придумайте выдающийся многоугольник из четырёх клеток.

б) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

б) При любых

4. (*Турнир городов, 2014, 8–9*) На клетчатой доске 5×5 Петя отмечает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки неперекрывающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток (уголки разрешается класть только «по клеточкам»). Какое наименьшее число клеток должен отметить Петя, чтобы Вася не смог выиграть?

6

5. (*Турнир городов, 1999, 8–9*) На плоскости нарисован чёрный равносторонний треугольник. Имеется девять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть чёрного треугольника (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

6. (*Турнир городов, 1991, 8–9*) Доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты — по диагоналям, и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

Нельзя

7. (*Турнир городов, 1995, 8–9*) На плоскости дан квадрат 8×8, разбитый на клеточки 1×1. Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 чёрных и 64 белых треугольника. Рассматриваются «правильные» покрытия — такие, что каждые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует правильных покрытий?

2^{16}

8. (*Турнир городов, 2000, 8–9*) Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух сортов, так как диагональ можно расположить двумя способами, причём плашек каждого сорта имеется достаточно много. Можно ли выбрать 18 плашек и сложить из них квадрат 6×6 так, чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

Можно

9. (*Турнир городов, 2003, 8–9*) Можно ли замостить доску 2003×2003 доминошками 1×2, которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие — вертикальными.)

Нет

10. (*Турнир городов, 1999, 10–11*) На плоскости нарисован чёрный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть чёрного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

11. (*Турнир городов, 2000, 10–11*) Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух сортов, так как диагональ можно расположить двумя способами, причём плашек каждого сорта имеется достаточно много. Можно ли выбрать 32 плашки и сложить из них квадрат 8×8 так, чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

Можно

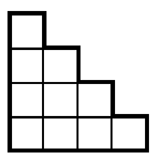
12. (*Турнир городов, 1985, 9–10*) В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3 и одна плитка 1×1. Докажите, что плитка 1×1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.

13. (*ММО, 2011, 10*) Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.

14. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 10*) При каких n можно оклеить в один слой поверхность клетчатого куба $n \times n \times n$ бумажными прямоугольниками 1×2 так, чтобы каждый прямоугольник граничил по отрезкам сторон ровно с пятью другими?

При всех чётных n

15. (*Всеросс., 2010, регион, 10*) Назовём лестницей высоты n фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали (на рисунке показана лестница высоты 4). Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?



2^{n-1}

16. (*Всеросс., 2015, финал, 10*) Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

17. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?

Нет

18. (*Турнир городов, 2010, 10–11*) Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей — прямоугольник.

19. (*Турнир городов, 1993, 10–11*) Единичный квадрат разбит на конечное число квадратиков (размеры которых могут различаться). Может ли сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 1993? (Если квадратик пересекается с диагональю по одной точке, это тоже считается пересечением.)

Может

20. (*Турнир городов, 1998, 10–11*) а) На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного шестиугольника, причём у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём каждая — только одним гвоздём? б) Тот же вопрос про правильные пятиугольники.

а) Всегда; б) не всегда

21. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8. При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску

а) хотя бы 40 доминошек;

б) хотя бы 41 доминошку;

в) более 41 доминошки.

22. (*ММО, 2018, 11.2*) На доску 2018×2018 клеток положили без наложений некоторое количество доминошек, каждая из которых закрывает ровно две клетки. Оказалось, что ни у каких двух доминошек нет общей целой стороны, т. е. никакие две не образуют ни квадрат 2×2, ни прямоугольник 4×1. Может ли при этом быть покрыто более 99% всех клеток доски?

23. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) В прямоугольную коробку с основанием $m \times n$, где m и n — нечётные числа, уложены домино размера 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, её разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перегнать дырку в любой другой угол.

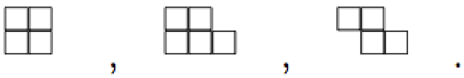
24. (*Всеросс., 2006, финал, 9*) Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки: прямоугольники 1×2. Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведён разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

Соперник

25. (*ММО, 1974, 9–10*) Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ см разрезан на прямоугольные полоски, каждая из которых имеет сторону 1 см. Линии разрезов параллельны сторонам исходного листа. Доказать, что хотя бы одно из чисел a или b целое.

26. (*«Высшая проба», 2018, 9.3*) Имеется три типа фигурок. Тип A: квадраты 2×2. Тип B: прямоугольники 3×2, из которых вырезана одна угловая клетка. Тип C: прямоугольники 3×2, из которых вырезаны две противоположные угловые клетки:

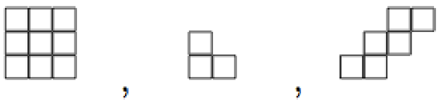
Тип A Тип B Тип C



Из этих фигурок составлен прямоугольник 20×17. Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? Фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать.

27. (*«Высшая проба», 2018, 10.4*) Прямоугольник 13×9 составлен из трёх типов фигурок:

Тип A Тип B Тип C



(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.