Тренировочные задачи

Показательные уравнения и неравенства

1. Решите уравнение:

а) $2^x = 32$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$;

в) $4^{x+2} = 64$;

г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

а) 5; б) −2; в) 1; г) $\frac{7}{4}$

2. Решите уравнение:

а) $3^{x^2-3x+2} = 1$;

б) $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{7x-3}$;

г) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$.

а) 1, 2; б) $\frac{3}{2}$; в) 1; г) $-\frac{1}{3}$

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$;

б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{64}{27}$;

г) $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}} = 4^{-1{,}25}$.

а) 4; б) $\frac{35}{13}$; в) −3; г) 2

4. Решите уравнение:

а) $0{,}125 \cdot 2^{4x-16} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$;

б) $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$;

в) $5^{\frac{6x+3}{x}} = \sqrt[4]{125^{2x+1}}$;

г) $25 \cdot 0{,}2^{x+0{,}5} = \sqrt{5} \cdot 0{,}04^x$.

а) $\frac{38}{3}$; б) 2; в) $-\frac{1}{2}$, 4; г) −1

5. Решите уравнение:

а) $2^{x+2} + 2^x = 5$;

б) $4^{x+1} + 4^x = 320$;

в) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$;

г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.

а) 0; б) 3; в) 1; г) −1

6. Решите уравнение:

а) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122$;

б) $0{,}2^{x-1} - 0{,}2^{x+1} = 4{,}8$;

в) $0{,}5^{3-2x} + 3 \cdot 0{,}25^{1-x} = 7$;

г) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$.

а) 2; б) 0; в) $\frac{3}{2}$; г) 3

7. Решите уравнение:

а) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;

б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$;

в) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$;

г) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

а) 2; б) 0, 1; в) 1; г) 2

8. Решите уравнение:

а) $3^{-x} + 3^{x+3} = 12$;

б) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

в) $4^x - 0{,}25^{x-2} = 15$;

г) $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$.

а) -2, -1; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$; в) 2; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$

9. Решите уравнение:

а) $3^x = 4^x$;

б) $3^{2x} - 5^x = 15 \cdot 9^x - 15 \cdot 5^x$;

в) $5^{x+6} - 3^{x+7} = 43 \cdot 5^{x+4} - 19 \cdot 3^{x+5}$;

г) $9^x - 2^{x+0{,}5} = 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$.

а) 0; б) 0; в) -3; г) $\frac{3}{2}$

10. Решите уравнение:

а) $9^x + 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$;

б) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

в) $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$;

г) $9^{x+2} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

а) 0; б) 0, $\frac{1}{2}$; в) $\log_{\frac{2}{7}} 3$; г) -2

11. Решите уравнение:

а) $8^x - 4 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 9 = 0$;

б) $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

а) 0, $\log_2 \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$; б) 0, 1, 2

12. Решите уравнение:

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$;

б) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

а) ± 2; б) ± 2

13. Решите уравнение:

а) $2\left(4^x+4^{-x}\right)+14=9\left(2^x+2^{-x}\right)$;

б) $9^{x+\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{9^x}+26=16\left(3^x+3^{-x}\right)$.

а) 0, ±1; б) 0, ±1

14. Решите неравенство:

а) $2^x>16$;

б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\geqslant 27$;

в) $4^{2x-5}<\dfrac{1}{64}$;

г) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2}\leqslant\dfrac{1}{625}$.

а) $(4;+\infty)$; б) $(-\infty;-3]$; в) $(-\infty;1)$; г) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

15. Решите неравенство:

а) $5^{2x-6}<1$;

б) $\left(\sqrt{6}\right)^x\geqslant\dfrac{1}{216}$;

в) $0{,}7^x<2\dfrac{2}{49}$;

г) $4^{0{,}5x^2-3}\geqslant 8$.

а) $(-\infty;3)$; б) $[-6;+\infty)$; в) $(-2;+\infty)$; г) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$

16. Решите неравенство:

а) $16^x>0{,}125$;

б) $3^{x+1}<\dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$;

в) $0{,}2^{\frac{2x-3}{x-2}}\geqslant 5$;

г) $0{,}1^{\frac{2x+1}{x-1}}>1000$.

а) $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{3};2\right)$; г) $(1;4)$

17. Решите неравенство:

а) $0{,}25^{10x}>64^{\frac{8}{3}-x^2}$;

б) $0{,}04^{2x}\geqslant\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3{,}75}$.

а) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(4;+\infty)$; б) $\left[-\frac{15}{2};-\frac{1}{2}\right]$

18. Решите неравенство:

а) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2}\geqslant 2{,}5$;

в) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\geqslant 448$;

г) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\leqslant 9$.

а) $(-\infty;1)$; б) $(-\infty;1]$; в) $\left[\frac{9}{2};+\infty\right)$; г) $(-\infty;2]$

19. Решите неравенство:

а) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$; б) $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 > 0$;

в) $4^x - 2^x - 2 \geqslant 0$; г) $25^x - 3 \cdot 5^x - 10 \leqslant 0$.

а) $(1;2)$; б) $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$; в) $[1;+\infty)$; г) $(-\infty;1]$

20. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$;

в) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leqslant 0$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$.

а) $(\log_2 3;2)$; б) $[-2;+\infty)$; в) $[-1;+\infty)$; г) $(-1;1)$

21. Решите неравенство:

а) $2^x + 3 \cdot 2^{2-x} < 7$; б) $3^x - 5 \cdot 3^{-x} \geqslant 4$.

а) $(\log_2 3;2)$; б) $[\log_3 5;+\infty)$

22. Решите неравенство:

а) $9^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x > 0$; б) $4^{2x+1} - 7 \cdot 12^x + 3^{2x+1} < 0$;

в) $2 \cdot 25^x - 5^{x+1} \cdot 2^x + 2^{2x+1} \leqslant 0$; г) $3 \cdot 49^x + 21^x - 2 \cdot 9^x \leqslant 0$.

а) $(0;+\infty)$; б) $(-1;0)$; в) $\left[\log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}; \log_{\frac{5}{2}} 2\right]$; г) $\left(-\infty; \log_{\frac{7}{3}} \frac{2}{3}\right]$

23. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1}{2^x - 2} \geqslant \dfrac{1}{4 - 2^{x-1}}$; б) $\dfrac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leqslant 0$.

а) $(1;2] \cup (3;+\infty)$; б) $(-\infty;0) \cup [1;+\infty)$

24. Решите графически неравенство:

а) $2^x > 3 - x$; б) $2^x < \dfrac{3x}{2} + 1$.

а) $(1;+\infty)$; б) $(0;2)$

Цель следующих задач — повторение всего курса показательных уравнений и неравенств (в целом на более высоком уровне сложности). По умолчанию требуется решить уравнение или неравенство.

25. $\left(2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4.$

$\boxed{9}$

26. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2\sqrt{x}-1} = 2{,}25^{x+\sqrt{x}-1}.$

$\boxed{0{,}25}$

27. $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}.$

$\boxed{2,\ -5,\ -\frac{4}{5}}$

28. $2^{x^2+x-6} + 2^{x^2+x-9} = 56.$

$\boxed{-4,\ 3}$

29. $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162.$

$\boxed{66}$

30. $3^{x+1} - 5^x + 3^{x-1} - 5^{x-1} = 5^{x-2} - 3^{x-2}.$

$\boxed{2}$

31. $0{,}81^{x-1} - 0{,}9^{2x-3} + 0{,}01^{x-1{,}5} - 9 \cdot 0{,}1^{2x-2} = 0.$

$\boxed{1{,}5}$

32. $0{,}1^{x+1} + 0{,}01^x = 0{,}02.$

$\boxed{1}$

33. $3 \cdot 5^{x-2} - 2 \cdot 5^{4-x} - 5 = 0.$

$\boxed{3}$

34. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$

$\boxed{1{,}5}$

35. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0.$

$\boxed{0}$

36. $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0.$

$\boxed{-1,\ 0}$

37. $3^x + \sqrt{3^{x+2} \cdot 7^x} = 3 \cdot 7^x + \sqrt{21^x}\,.$

$\boxed{0}$

38. $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} = 0.$

$\boxed{-2,\ 3}$

39. $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$.

$\boxed{1,\ 2}$

40. $2^{x+2}+8^x=5\cdot 4^x$.

$\boxed{0,\ 2}$

41. $9^{x+1}-3\cdot 3^{x+3}-27\cdot 3^{x-2}+27=0$.

$\boxed{-1,\ 2}$

42. $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$.

$\boxed{1,\ -\log_2 3}$

43. $\left(6-\sqrt{35}\,\right)^x+\left(6+\sqrt{35}\,\right)^x=142$.

$\boxed{\pm 2}$

44. $8\left(4^x+4^{-x}\right)-54\left(2^x+2^{-x}\right)+101=0$.

$\boxed{\pm 1,\ \pm 2}$

45. $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1$.

$\boxed{1}$

46. $4^{\frac{1}{\cos^2 x}}-2^{\operatorname{tg}^2 x}-3=0$.

$\boxed{\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

47. $4^{\sin x}-3\cdot 2^{\sin x+\cos x}+2\cdot 4^{\cos x}=0$.

$\boxed{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

48. $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leqslant 0$.

$\boxed{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]}$

49. $7^{x-\frac{x^2}{8}}<7^{1-x}\cdot\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2}+6$.

$\boxed{\left(-\infty;4-2\sqrt{2}\right)\cup\left(4+2\sqrt{2};+\infty\right)}$

50. $2^{2x+4}+2^{2x+1}-2^{2x+3}>2^{x+2}+0{,}5^{1-x}-2^{x+1}$.

$\boxed{(-2;+\infty)}$

51. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-2}<3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+2^x$.

$\boxed{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}$

52. $\dfrac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 5.$

$\boxed{\left(-\infty; \log_3 \frac{1}{2}\right] \cup \left[\log_3 \frac{3}{5}; \log_3 \frac{5}{3}\right)}$

53. $\dfrac{2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3}}{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x} < 1.$

$\boxed{\left(\log_{\frac{3}{5}} \frac{122}{49}; 1\right)}$

54. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geqslant \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{1+x}}.$

$\boxed{[-2; -1)}$

55. $4^{3x^2+x} - 8 < 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$

$\boxed{\left(-1; \frac{2}{3}\right)}$

56. $2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leqslant 16 - 2x^3.$

$\boxed{(\infty; 1] \cup [2; +\infty)}$