Тренировочные задачи

Симметрия в задачах с параметрами

1. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2001*) При каких значениях b уравнение

$$\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

2. (*МГУ, мехмат, 1990*) Найти все a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin\cos x + a^2 = 0$$

имеет единственный корень.

3. (*МГУ, геологич. ф-т, 2003*) При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-2)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

4. (*МГУ, физический ф-т, 1999*) При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $[0; 2\pi)$?

5. (*МГУ, ф-т психологии, 1995*) Найти все a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

6. (*МГУ, химический ф-т, 1999*) Найти все a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число корней.

7. (*МГУ, химический ф-т, 2002*) Найти все значения a, при которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

8. (*МГУ, ВМК, 1998*) Найти все a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\frac{x^2-1}{x} + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственный корень.

9. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} + a^2 - 4 = 2a\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

имеет единственное решение.

10. (*МГУ, химический ф-т, 2005*) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

11. (*МГУ, экономич. ф-т, 2002*) Найти все a, при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2} + \sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2} \geqslant \sqrt[4]{\sqrt{3}a + 24 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \left|y-\sqrt{2}a^2\right| + \left|y-\sqrt{3}a\right|}$$

имеет единственное решение.

12. (*МГУ, экономич. ф-т, 2005*) Найти все b, при которых уравнение

$$b^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2+8-8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

13. Найти все значения a, при которых система

а) $\begin{cases} (|x|+1)\,a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

имеет единственное решение.

14. (*МГУ, МШЭ, 2005*) Найти все b, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

15. (*МГУ, экономич. ф-т, 1987*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

16. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2007*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \left(5-2\sqrt{6}\right)^x + \left(5+2\sqrt{6}\right)^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a-4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - a^2 + 5(a-1) = (a^2 - 5a + 6)(x-3)^6 + \sqrt{(x-3)^2}\,, \\ x^2 + y^2 = 2(3x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

18. (*МГУ, экономич. ф-т, 1990*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^y + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. (*МГУ, ИСАА, 1991*) При каких значениях b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

20. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1995*) При каких значениях b система

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два решения?

21. (*МГУ, ИСАА, 1998*) При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3} \cdot y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3} \cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

22. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2002*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \left(3\sqrt{x|x|} + |y| - 3\right)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

23. (*МГУ, физический ф-т, 1981*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

24. (*МГУ, экономич. ф-т, 1977*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

25. (*МГУ, филологич. ф-т, 1984*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} y \geqslant x^2+2a, \\ x \geqslant y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

26. (*МГУ, филологич. ф-т, 1992*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0, \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

27. (*МГУ, географич. ф-т, 1997*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2-2ax-2y+4a-2 \leqslant 0, \\ ay^2+4ay-2x+7a+4 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

28. (*МГУ, мехмат, 2001*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2+2ax+a+4 \leqslant 0, \\ ax^2+2(a+1)x+a+1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

29. (*МГУ, биологич. ф-т, 1991*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ \left(x+y+a\sin^2 x\right)\left((1-a)\ln(1-xy)+1\right)=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

30. (*МГУ, химический ф-т, 1986*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|}=1-\sqrt{5|x|}, \\ 16a-9-6y=25x^2+y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

31. (*МГУ, биологич. ф-т, 2001*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(x\sqrt{6-2a^2}\right), \\ \cos x = \left(a - \dfrac{2}{3}\right)\sin\left(x\sqrt{6-2a^2}\right) \end{cases}$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ единственное решение.

32. (*МГУ, мехмат, 1998*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

33. (*МГУ, экономич. ф-т, 1999*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} a\sin|2z| + \log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right) + a^2 = 0, \\ \left((y^2-1)\cos^2 z - y\sin 2z + 1\right)\left(1 + \sqrt{\pi + 2z} + \sqrt{\pi - 2z}\right) = 0 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений, но не менее одного. Найти эти решения.

34. (*МГУ, химический ф-т, 1988*) Найти все значения параметра a, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

35. Найдите все значения параметров a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

36. (*«Физтех», 2009*) Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 - a = 0, \\ x^2 - y + a = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответы

1. $b = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2. $a = 0$ или $a = 2\sin 1$.

3. $a = 0, -\frac{2}{5}$.

4. $a = -2, 1$.

5. $a = 2$.

6. $a = \pm 1$.

7. $a = 0, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

8. $a = -\frac{3}{2}$.

9. $a = 0$ или $a = 3$.

10. $a = 2$.

11. $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

12. $b = 3$.

13. а) $a = 2$; б) $a = 0$.

14. $b = 2$.

15. $a = \frac{4}{3}$.

16. $a = 2$ или $a = 4$.

17. $a = 1$ или $a = 4$.

18. $a = -1, 2$.

19. $b = \sqrt{2}$.

20. $b \in (-2; 0)$.

21. $a = 2$.

22. $a = \pm 4, 6$.

23. $a = \pm\sqrt{2}$.

24. $a = \frac{5}{2}$.

25. $a = \frac{1}{8}$.

26. $a = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{6}$.

27. $a = \frac{1}{3}$.

28. $a = -\frac{3}{4}\,, \frac{4}{3}\,.$

29. $a = 1.$

30. $a = \frac{1}{128}\,, \frac{1}{16}\,.$

31. $a \in \left\{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \pm 1, \pm\sqrt{3}\,\right\}.$

32. $a = \frac{9}{4} + 4n,\ n \in \mathbb{Z}.$

33. Если $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, то $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$, $y = 0$, $z = 0$; если $a = \frac{\sqrt{6}-2}{4}$, то $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$, $y = 1$, $z = \frac{\pi}{4}$ или $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$, $y = -1$, $z = -\frac{\pi}{4}$; остальные a не подходят.

34. $a = -2, -1.$

35. $a = b = -2.$