

# Тренировочные задачи

## Условный экстремум

1. (МГУ, ВМК, 1986) Найти координаты точки, лежащей на прямой  $-4x - 3y = 25$  и наименее удалённой от начала координат.

2. (МГУ, физический ф-т, 1995) Найти наименьшее значение  $xy$  при условии

$$\begin{cases} x + y = 3a - 1, \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2. \end{cases}$$

3. (МГУ, ВМК, 2006) Пусть  $(x, y)$  — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = \alpha + 2, \\ 9x^2 + y^2 = 5\alpha - 2. \end{cases}$$

При каком  $\alpha$  произведение  $xy$  принимает наибольшее значение?

4. (МГУ, ВШБ, 2004) Найдите наибольшее значение выражения  $3x - 2y$  на множестве переменных  $x, y$ , удовлетворяющих условию  $4x^2 + y^2 = 16$ .

5. (МГУ, ф-т психологии, 1986) Найти наименьшее значение суммы  $x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

6. (МГУ, географич. ф-т, 2001) Найти наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 4y^2 - z^2 + 6x + 4yz$$

при условии, что числа  $x, y, z$  образуют арифметическую прогрессию, а числа  $x - z, z - y, 2x$  — геометрическую.

7. (МГУ, химический ф-т, 1997) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения  $x^2 + 2y^2$  при условии

$$x^2 - xy + 2y^2 = 1.$$

8. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005) Переменные  $x, y$  связаны условием

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0.$$

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения  $2ax - 3y - 10$  больше 12.

9. (МГУ, биологический ф-т, 1989) Числа  $x, y, z$  таковы, что

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение  $2x + y - z$ ?

10. (МГУ, геологич. ф-т, 2007) Числа  $x, y, z$  таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях  $z$  сумма  $x^2 + y^2$  максимальна? Найдите это максимальное значение.

11. (Олимпиада «Ломоносов», 2007) Определите, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке  $(0, 0)$  помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 < 0.$$

12. (МГУ, ВМК, 1993) Найти все пары  $(a, b)$ , при которых точка с координатами, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} a^2x - y = 2a^2 - 2b, \\ x - by = 2 - 2a^2, \\ y = 2 - x, \end{cases}$$

наименее удалена от точки  $(3; -1)$ .

13. (МГУ, ВМК, 2000) Найти наибольшее значение выражения

$$14x^2 + 40x + y - 324,5$$

при условиях

$$4x^2 + 20x + y \geq 162 \quad \text{и} \quad 20x^2 - 80x + y \leq 8.$$

14. (МГУ, мехмат, 2002) Найдите минимальное значение выражения  $(x + y - z)^2$  при условии, что числа  $x, y$  и  $z$  удовлетворяют одновременно каждому из неравенств

$$1 \leq (x + y)^2 \leq \frac{4}{3}, \quad 8 \leq (y + z)^2 \leq 9, \quad 10 \leq (z + x)^2 \leq 11.$$

15. (МГУ, ИСАА, 2004) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{y^2}{25} + \frac{\omega^2}{144},$$

если величины  $x, y, z, \omega$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0, \\ z^2 + \omega^2 - 2\omega - 143 = 0, \\ x\omega + yz - x + \omega + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

## ОТВЕТЫ

1.  $(-4, -3)$ .

2.  $-\frac{9}{10}$ .

3.  $\alpha = 4$ .

4. 10.

5.  $7\sqrt{3}$ .

6.  $-9$ .

7.  $\frac{8+2\sqrt{2}}{7}$  и  $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$ .

8.  $|a| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

9.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ .

10. 8 при  $z = 5$ .

11.  $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{2}{11}$ .

12.  $a = b = 0$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = -a^2 - 1$ .

13. 30.

14.  $\frac{(3+\sqrt{8}-\sqrt{11})^2}{4}$ .

15.  $\frac{4201}{3600} \pm \frac{\sqrt{601}}{30}$ .