

Тренировочные задачи

Рациональные уравнения и неравенства с параметрами

1. При всех a решить уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0.$$

2. При всех a решить уравнение

$$\frac{a(x - a)}{x - 2} = 0.$$

3. При всех a решить уравнение

$$\frac{a(x - 2)}{x - a} = 0.$$

4. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{4x - a}{x - 2a} < 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $2 \leq x \leq 4$.

5. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{x + 3a - 5}{x + a} \geq 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 4$.

6. (МГУ, социологич. ф-т, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a + 4)x^2 + 6x - 1}{x + 3} = 0$$

имеет единственное решение?

7. (МГУ, химический ф-т, 2003) Найдите все значения параметра b , при которых множество решений неравенства

$$\frac{b}{x + b} < 0$$

содержит точку $x = 2$.

8. (Олимпиада «Покори Воробьёвы горы», 2006) При всех значениях a решите уравнение

$$3^{\frac{ax+2}{x^2+2}} + 3^{\frac{3x^2-ax+4}{x^2+2}} = 12.$$

9. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Найдите все a , при которых уравнение

$$\frac{(x^3 - 1)(x^2 - 16)}{\lg(15a - x) - \lg(x - a)} = 0$$

имеет единственный корень.

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003) Найдите все значения параметра b , при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x - 3b}{b - 2x} < 0.$$

11. (МГУ, физический ф-т, 2003) Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

12. (МГУ, химический ф-т, 1999) При каждом $a \in [-1; 0]$ решить неравенство

$$\log_{x+a} (x^2 - (a+1)x + a) \geq 1.$$

13. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \geq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

14. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все a , при которых сумма длин интервалов, составляющих множество решений неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$$

не меньше 1.

Ответы

1. Если $a \neq 1, 3$, то $x = 1$ и $x = 3$; если $a = 1$, то $x = 3$; если $a = 3$, то $x = 1$.

2. Если $a \neq 0, 2$, то $x = a$; если $a = 0$, то $x \neq 2$; если $a = 2$, то решений нет.

3. Если $a \neq 0, 2$, то $x = 2$; если $a = 0$, то $x \neq 0$; если $a = 2$, то решений нет.

4. $a \in (2; 8)$.

5. $a \in (-\infty; -4) \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$.

6. $a \in \{-13, -4, -\frac{17}{9}\}$.

7. $b \in (-2; 0)$.

8. Если $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = 0, a, \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{4}$; если $a \in (-4; 4)$, то $x = 0, a$.
9. $a \in (\frac{1}{15}; \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{8}; \frac{4}{15}) \cup \{\frac{1}{2}\} \cup [1; 4)$.
10. $b \in (-\infty; -6) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.
11. Если $a \leq -2$, то $x \in (-\infty; a) \cup (-2; +\infty)$; если $a \in (-2; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (a; +\infty)$; если $a = \frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.
12. Если $a = -1$, то $x > 2$; если $a \in (-1; -\frac{1}{2})$, то $x \in (1; a + 2] \cup (1 - a; +\infty)$; если $a = -\frac{1}{2}$, то $x \in (1; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$; если $a \in (-\frac{1}{2}; 0)$, то $x \in (1; 1 - a) \cup [a + 2; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \geq 2$.
13. $a \in (-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.
14. $a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.