Тренировочные задачи

Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 3

1. (*МГУ, ВМК, 2003*) При всех значениях параметра d решите уравнение

$$4^x + d \cdot 49^x = 4 \cdot 14^x.$$

2. (*Олимпиада «Покори Воробьёвы горы», 2010*) При каких значениях параметра a неравенство

$$9^x - 2a \cdot 3^x + a^2 + a - 5 < 0$$

не имеет решений?

3. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1995*) Найти все a, при которых уравнение

$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$$

не имеет корней.

4. (*МГУ, МШЭ, 2007*) При каких значениях параметра b уравнение

$$81^x - 2 \cdot 3^{3x+1} + 8 \cdot 9^x + (6b - 12) \cdot 3^{x-1} - b^2 + 4b - 4 = 0$$

имеет три различных корня?

5. (*МГУ, физический ф-т, 1985*) При каждом a решить уравнение

$$4^x - 2a(a + 1)2^{x-1} + a^3 = 0.$$

6. (*МГУ, физический ф-т, 1990*) При каждом a решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x + a} = 2.$$

7. (*МГУ, географич. ф-т, 2000*) Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2 + 1) = \log_{a-6,5}((a - 5)x)$$

имеет ровно два различных корня.

8. (*МГУ, физический ф-т, 2001*) При каждом a решить неравенство

$$3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0.$$

9. (*МГУ, физический ф-т, 1996*) При каждом a решить неравенство

$$2 - \log_a x < \log_a(x - 1).$$

10. (*МГУ, физический ф-т, 1999*) При каждом a решить неравенство

$$\log_{2a}\log_3 x^2 > 1.$$

11. (*МГУ, мехмат, 1998*) Найти все a, при которых уравнение

$$\big(x^2-(a+1)x+3(a-2)\big)\log_{a-x}(2a-x-1)=0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

12. (*МГУ, мехмат, 1986*) Найти все a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} x-by+az^2=0, \\ 2bx+(b-6)y-8az=8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

13. (*МГУ, физический ф-т, 1999*) При каждом a решить уравнение

$$\log_a(x^2-3a)=\log_a(ax^2-3x).$$

14. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) При каждом $a>1$ решить неравенство

$$a^x(a-1)^x-2a^{x+1}-(a-1)^x+2a\leqslant 0.$$

15. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} a(x-4)=3(y+2), \\ y+\sqrt{x}=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

16. (*МГУ, геологич. ф-т, 1995*) Найти все a, при которых неравенство

$$9^x<20\cdot 3^x+a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

17. (*МГУ, мехмат, 1995*) Найти все a, при которых функция

$$f(x)=a(2\sin x+\cos^2 x+1)$$

не принимает значений, бóльших 3.

18. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1988*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+2ax+4a^2-5a+3\leqslant 4\sin y-3\cos y, \\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. (*МГУ, мехмат, 1996*) Найти все a, при которых уравнение

$$2\cos^2 2^{2x-x^2} = a + \sqrt{3}\sin 2^{2x-x^2+1}$$

имеет хотя бы один корень.

20. (*МГУ, геологич. ф-т, 1999*) Найти наибольшее значение a, при котором уравнение

$$\operatorname{arctg}\left|9^x + 4^x + a\sqrt{3}\cdot 6^x\right| = 0$$

имеет хотя бы один корень.

21. (*МГУ, геологич. ф-т, 1989*) Найти все a, при которых уравнение

$$(a^2+8a+16)(2-2\cos x-\sin^2 x)+(32+2a^2+16a)(\cos x-1)+3a+10=0$$

не имеет корней.

22. (*МГУ, ВМК, 1983*) При каждом a решить уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2).$$

23. (*МГУ, ИСАА, 1995*) Найти все a, при которых неравенство

$$x^2+4x+6a|x+2|+9a^2 \leqslant 0$$

имеет не более одного решения.

24. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1999*) Найти все a, при которых уравнение

$$(x^2+x)(x^2+5x+6)=a$$

имеет ровно три различных корня.

25. (*МГУ, мехмат, 1993*) Найти все a, при которых уравнение

$$4^x+(a^2+5)\cdot 2^x+9-a^2=0$$

не имеет корней.

26. (*МГУ, филологич. ф-т, 1989*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x+y+z=x^2+4y^2, \\ x+2y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

27. (*МГУ, физический ф-т, 1994*) Найти все a, при которых уравнение

$$2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$$

имеет четыре различных корня.

28. (*МГУ, ВМК, 1988*) Найти все a, при которых уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a\right)\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$$

имеет не менее двух различных корней, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

29. (*МГУ, физический ф-т, 1998*) Найти все a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+1)<1$$

выполняется для любого $x<0$.

30. (*МГУ, физический ф-т, 1998*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \log_3(y-3)-2\log_9 x=0, \\ (x+a)^2-2y-5a=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

31. (*МГУ, экономический ф-т, 1995*) Найти все a, при которых уравнение

$$x-2=\sqrt{2-2(a+2)x}$$

имеет единственный корень.

32. (*МГУ, экономический ф-т, 1978*) Найти все a, при которых неравенство

$$a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$$

выполняется для любого x.

33. (*МГУ, ВМК, 1996*) При каждом a решить уравнение

$$25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0.$$

34. (*МГУ, экономический ф-т, 1991*) Найти все a, при которых уравнение

$$\sin^2 x+(a-2)^2\sin x+a(a-2)(a-3)=0$$

имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно три различных корня.

35. (*МГУ, ИСАА, 1998*) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=\sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

36. (*МГУ, МШЭ, 2005*) При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

37. (*МГУ, ф-т психологии, 1989*) При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства
$$x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0.$$

38. (*МГУ, экономический ф-т, 2003*) Найдите все значения b, при которых уравнение
$$3\sqrt[5]{x+2} - 16b^2\sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$
имеет единственное решение.

39. (*МГУ, географич. ф-т, 2002*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(a-1)\cos^2 x - \left(a^2+a-2\right)\cos x + 2a^2 - 4a + 2 = 0$$
имеет более одного решения на отрезке $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

40. (*МГУ, биологич. ф-т, 2002*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right)^2 + (a+5)\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right) - a^2 + 8a + 2 = 0$$
имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

41. (*МГУ, химический ф-т, 2001*) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2 \geqslant 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

42. (*МГУ, ф-т психологии, 2001*) При каждом a решить неравенство
$$ax^4 + x^3 + \left(2a + 3a^3\right)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

43. (*МГУ, мехмат, 1996*) Найти все a, при которых уравнение
$$\left(x^2 - x + a^2 + 2\right)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$
имеет ровно три различных корня.

Ответы

1. Если $d \leqslant 0$, то $x = \log_{\frac{2}{7}}\left(2 + \sqrt{4-d}\right)$; если $d \in (0; 4)$, то $x = \log_{\frac{2}{7}}\left(2 \pm \sqrt{4-d}\right)$; если $d = 4$, то $x = \log_{\frac{2}{7}} 2$; если $d > 4$, то решений нет.

2. $a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

3. $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

4. $b \in (1; 2) \cup (2; 5) \cup (5; 6)$.

5. Если $a < 0$, то $x = \log_2 a^2$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x = \log_2 a^2$ и $x = \log_2 a$.

6. Если $a \in (-4; -1) \cup (-1; +\infty)$, то $x = 3 - \sqrt{a+5}$; при остальных a решений нет.

7. $a \in (7; 7{,}5) \cup (7{,}5; +\infty)$.

8. Если $a < 0$, то $x > \frac{4a^2+a}{2}$; если $a \geqslant 0$, то $x > \frac{a^2+9a}{18}$.

9. Если $a \in (0; 1)$, то $x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right)$; если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}; +\infty\right)$; при остальных a решений нет.

10. Если $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $x \in (-3^a; -1) \cup (1; 3^a)$; если $a \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то $x \in (-\infty; -3^a) \cup (3^a; +\infty)$; при остальных a решений нет.

11. $a \in [1; 3] \cup \{4\}$.

12. $a \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

13. Если $a \in (0; 1) \cup (1; 3]$, то $x = -a - 3$; если $a > 3$, то $x = a$ и $x = -a - 3$; при остальных a корней нет.

14. Если $a \in (1; 2)$, то $x \in (-\infty; \log_{a-1} 2a] \cup [0; +\infty)$; если $a = 2$, то $x \geqslant 0$; если $a > 2$, то $x \in [0; \log_{a-1} 2a]$.

15. $a \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

16. $a \leqslant -99$.

17. $a \in [-3; 1]$.

18. $a = -\frac{1}{2}$ или $a = 2$.

19. $a \in [-1; 2)$.

20. $-\sqrt{2}$.

21. $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (-3; -2)$.

22. Если $a < -2$, то $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ и $x = 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}$; если $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$, то $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ и $x = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$; если $a = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{3}{2}$; если $a > 1$, то $x = 1 + \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ и $x = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$.

23. $a \geqslant \frac{2}{3}$.

24. $a = \frac{9}{16}$.

25. $a \in [-3; 3]$.

26. $a = -\frac{17}{48}$.

27. $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$.

28. $a \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\} \cup [2; 4)$.

29. $a < \sqrt{2}$.

30. $a \in \left[-\frac{7}{3}; 6\right)$.

31. $a \leqslant -\frac{3}{2}$.

32. $a \in \left(-\infty; -2-\sqrt{6}\,\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

33. Если $a < -\frac{3}{2}$, то $x = \log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; если $a \in \left[-\frac{3}{2}; 11\right)$, то решений нет; если $a = 11$, то $x = 1$; если $a > 11$, то $x = \log_5 \frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$.

34. $a \in \left\{0, 2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

35. $a = 2$.

36. $a \in (-\infty; 1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

37. Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \in \left[-\frac{a}{3}; 0\right) \cup (8a; +\infty)$.

38. $b \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; +\infty\right)$.

39. $a \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{10}\right] \cup \{1\}$.

40. а) $a = 2+\sqrt{2}$; б) $a \in \left(-\infty; 2-\sqrt{2}\,\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

41. $a \geqslant 3$.

42. Если $a \leqslant -\sqrt[4]{\frac{1}{12}}$, то решений нет; если $a \in \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}; 0\right)$, то $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a \in \left(0; \sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right]$, то $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right)$; если $a > \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$, то x любое.

43. $a = \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{15}+1}{4}$.