

## Тренировочные задачи

### Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2

1. Докажите, что уравнение имеет решение при любом  $a$ :

а)  $(a^2 + 1)x^2 + (a^3 + 4a^2 + a)x - a^2 - 2 = 0$ ;

б)  $(a^2 - 2a + 3)x^2 - (3a^2 + 5a - 1)x + 7a - 8 = 0$ ;

в)  $(a^3 - 2a^2)x^2 + (a^3 - a + 2)x + a^2 + 1 = 0$ .

2. При каких  $a$  один корень уравнения  $2x^2 + ax + 4 - a = 0$  больше 3, а другой меньше 3?

3. При каких  $a$  один корень уравнения  $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$  больше 1, а другой меньше 1?

4. При каких  $a$  число  $-1$  лежит между корнями уравнения  $(a - 2)x^2 + 3ax + 5 = 0$ ?

5. При каких  $a$  один корень уравнения  $(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a = 0$  больше  $a$ , а другой меньше  $a$ ?

6. При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$  больше 3?

7. При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$  меньше  $-1$ ?

8. При каких  $a$  корни уравнения  $(2 + a)x^2 - 2ax + 3a = 0$  различны и положительны?

9. При каких  $a$  оба корня уравнения  $ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$  больше 1?

10. При каких  $a$  корни уравнения  $ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1 = 0$  меньше 1?

11. При каких  $a$  корни уравнения  $x^2 + x + a = 0$  больше  $a$ ?

12. При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 - ax + 2 = 0$  различны и принадлежат интервалу  $(0; 3)$ ?

13. При каких  $a$  корни уравнения  $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$  расположены на отрезке  $[-2; 6]$ ?

14. При каких  $a$  корни уравнения  $ax^2 - (a + 1)x + 2 = 0$  по модулю меньше 1?

15. При каких  $a$  корни уравнения  $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$  удовлетворяют условию  $0 < x < 3$ ?

16. При каких  $a$  корни уравнения  $x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$  расположены на отрезке  $[2; 5]$ ?

17. При каких значениях  $a$  ровно один из двух корней уравнения  $x^2 - 4x + a = 0$  принадлежит интервалу  $(1; 4)$ ?

18. При каких  $a$  неравенство  $x^2 + a^2x - 2a - 4 < 0$  выполнено для всех  $x \in [0; 1]$ ?

19. При каких  $a$  неравенство  $x^2 - ax + a > 0$  выполнено для всех  $|x| < 1$ ?

20. При каких  $a$  неравенство  $(x - 3a)(x + 2a + 1) < 0$  выполнено для всех  $x \in [1; 3]$ ?

21. При каких  $a$  неравенство  $ax^2 + (a + 1)x - 3 < 0$  выполнено для всех  $x < 2$ ?

22. При каких  $a$  неравенство  $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$  выполнено для всех  $x > 0$ ?
23. При каких значениях  $a$  неравенство  $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 3 > 0$  выполнено хотя бы при одном  $x < 1$ ?
24. При каких  $a$  уравнение  $(a - 1)x^2 - 2ax + 2 - 3a = 0$  имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $x > 1$ ?
25. При каких  $a$  уравнение  $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$  имеет единственное решение, удовлетворяющее условию  $0 < x < 3$ ?
26. Сколько корней, больших  $-1$ , имеет уравнение  $x^2 + (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$ ?
27. Сколько корней, меньших  $1$ , имеет уравнение  $(1 + a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ ?
28. Сколько корней на отрезке  $[-1; 1]$  имеет уравнение  $4x^2 - 2x + a = 0$ ?
29. Сколько корней на интервале  $(0; 2)$  имеет уравнение  $(2a + 3)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$ ?
30. Сколько корней на промежутке  $[-1; 3)$  имеет уравнение  $(4 - a)x^2 - 6ax + 3 = 0$ ?
31. При каких  $a$  один из корней уравнения  $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$  меньше  $2$ , а второй больше  $3$ ?
32. При каких значениях  $a$  корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $(3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 < -1 < x_2 < 1$ ?
33. При каких  $a$  корни уравнения  $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1$  имеют разные знаки и по модулю меньше  $4$ ?
34. При каких  $a$  один из корней уравнения  $a^2x^2 + ax - 2 = 0$  по модулю больше  $1$ , а второй по модулю меньше  $1$ ?
35. При каких  $m$  из неравенства  $x^2 - (3m + 1)x + m > 0$  следует, что  $x > 1$ ?
36. При каких  $a$  из неравенства  $x^2 - (a + a^3)x + a^4 < 0$  следует неравенство  $x^2 + 4x + 3 < 0$ ?
37. При каких  $a$  из неравенства  $ax^2 - x + 1 - a < 0$  следует неравенство  $0 < x < 1$ ?
38. Найти все  $a$  такие, что если  $x$  удовлетворяет неравенству  $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ , то  $|x| \leq 2$ .
39. При каких  $a$  из неравенства  $1 < x \leq 2$  следует неравенство  $x^2 - 2ax + a < 0$ ?
40. Найдите все  $a$ , при которых неравенство выполняется для любых  $x$ :
- а)  $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$ ;                      б)  $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ ;
- в)  $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ ;                      г)  $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$ .
41. При каких  $a$  каждое решение неравенства  $x^2 - 3x + 2 < 0$  будет содержаться среди решений неравенства  $ax^2 - (3a + 1)x + 3 \geq 0$ ?
42. При каких  $a$  любое решение неравенства  $x^2 - x - 2 < 0$  больше любого решения неравенства  $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$ ?

43. При каких  $a$  множество решений неравенства  $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 \leq 0$  содержит не менее пяти целых чисел?

44. (МГУ, физический ф-т, 1994) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 12x + a \leq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

45. (МГУ, ф-т психологии, 1977) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

46. (МГУ, географич. ф-т, 1990) Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$(a + 1)x^2 + (|a + 2| - |a + 10|)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

47. (МГУ, ф-т психологии, 1993) Пусть  $x_{1,2}$  — корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = (a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 5a + 2.$$

Найти:

- 1) все  $a$ , при которых  $x_1, x_2 > 1$ ;
- 2) все  $b$ , при которых выражение  $(x_1 - b)(x_2 - b)$  принимает постоянное значение для всех  $a$ , для которых оно определено.

48. (МГУ, ф-т психологии, 1981) Найти все  $a$ , при которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на отрезке  $[0; 2]$  равно 3.

49. (МГУ, ИСАА, 2000) Найти все  $a$ , при которых неравенство

$$|x^2 - 2x + a| > 5$$

не имеет решений на отрезке  $[-1; 2]$ .

50. (МГУ, мехмат, 1991) Найти все пары  $(p, q)$ , при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке  $[1; 5]$ .

51. (МГУ, химический ф-т, 1981) Найти все  $a$ , при которых неравенство

$$\left(a^3 + (1 - \sqrt{2})a^2 - (3 + \sqrt{2})a + 3\sqrt{2}\right)x^2 + 2(a^2 - 2)x + a > -\sqrt{2}$$

выполняется для любого  $x > 0$ .

52. (МГУ, геологич. ф-т, 1977) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ax \leq 3a^2 - 8a + 4, \\ x^2 + 4ax > 2 + 5a - 3a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

53. (МГУ, биологич. ф-т, 1977) Найти все  $a$ , при которых корни уравнений

$$x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$$

перемежаются (т. е. каждое из уравнений имеет два корня и между ними лежит корень другого уравнения).

54. (МГУ, ф-т гос. управления, 2006) Найти все значения  $a$ , для которых неравенство

$$(a + b + 36)x^2 - 5(x - 1)(b + 1) \leq 0$$

имеет решение при любом  $b$ .

55. (МГУ, физический ф-т, 1991) Найти все  $a$ , при которых все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$$

удовлетворяют неравенству  $|x| < 1$ .

## Ответы

1. в) Указание: найдите  $f(0)$  и  $f(-1)$ .

2.  $a < -11$ .

3.  $a \in (-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$ .

4.  $a \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (2; +\infty)$ .

5.  $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$ .

6.  $a > \frac{11}{9}$ .

7.  $a > 1$ .

8.  $a \in (-3; -2)$ .

9. Ни при каких.

10.  $a \in \left[\frac{2-\sqrt{6}}{4}; 0\right]$ .

11.  $a < -2$ .

12.  $a \in (2\sqrt{2}; \frac{11}{3})$ .

13.  $a \in [0; 4]$ .

14.  $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$ .
15.  $a \in \left(\frac{12}{7}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \{1\}$ .
16.  $a \in [2 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}]$ .
17.  $a \in (0; 3]$ .
18.  $a \in (-1; 3)$ .
19.  $a > 0$ .
20.  $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ .
21.  $a \in (-7 - 4\sqrt{3}; 0]$ .
22.  $a > 1$ .
23.  $a > \frac{3}{4}$ .
24.  $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$ .
25.  $a \in (0; \frac{12}{7}) \cup \left\{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$ .
26. Если  $a \in (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup \{-3\}$ , то один корень; если  $a \in (-\frac{7}{2}; -3)$ , то два корня; если  $a \in (-3; +\infty)$ , то таких корней нет.
27. Если  $a \in (-1; -\frac{1}{2}]$ , то один корень; если  $a \in (-\frac{1}{2}; 0]$ , то два корня; если  $a \in (0; +\infty)$ , то таких корней нет.
28. Если  $a \in [-6; -2) \cup \{\frac{1}{4}\}$ , то один корень; если  $a \in [-2; \frac{1}{4})$ , то два корня; если  $a \in (\frac{1}{4}; +\infty)$ , то таких корней нет.
29. Если  $a \in (-\frac{13}{14}; -\frac{3}{4}] \cup \left\{\frac{-37+2\sqrt{71}}{31}\right\}$ , то один корень; если  $a \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{-37+2\sqrt{71}}{31}\right)$ , то два корня; если  $a \in \left(\frac{-37+2\sqrt{71}}{31}; +\infty\right)$ , то таких корней нет.
30. Если  $a \in (-\infty; -\frac{7}{5}) \cup \{-\frac{4}{3}\} \cup \{1\} \cup [\frac{13}{9}; +\infty)$ , то один корень; если  $a \in [-\frac{7}{5}; -\frac{4}{3}) \cup (1; \frac{13}{9})$ , то два корня; если  $a \in (-\frac{4}{3}; 1)$ , то таких корней нет.
31.  $a \in (2; 5)$ .
32.  $a \in (-1; -\frac{2}{3})$ .
33.  $a \in (-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2})$ .
34.  $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$ .
35. Ни при каких.
36.  $a \in [-\sqrt[3]{3}; -1] \cup \{0; 1\}$ .
37.  $a \in [\frac{1}{2}; 1]$ .
38.  $a \in [-2; -\frac{1}{2}]$ .

39.  $a > \frac{4}{3}$ .
40. а)  $a < -6$ ; б)  $a > 6$ ; в)  $a \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$ ; г)  $a \in (-5; 1)$ .
41.  $a < \frac{1}{2}$ .
42.  $a < -4$ .
43.  $a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$ .
44.  $a \leq 20$ .
45.  $a < \frac{-3-\sqrt{5}}{16}$ .
46.  $a \in (5; 7)$ .
47. 1)  $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right]$ ; 2)  $b = \frac{7}{3}$ .
48.  $a = 1 - \sqrt{2}$  или  $a = 5 + \sqrt{10}$ .
49.  $a \in [-4; 2]$
50.  $p = -6, q = 7$ .
51.  $a \in [-\sqrt{2}; 1) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ .
52.  $a \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$ .
53.  $a \in [-3; 0)$ .
54.  $a \leq -35$ .
55.  $a \in \{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$ .