

## Тренировочные задачи

### Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 1

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2x + a = 0$  не имеет корней.
2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax^2 + 4x + 2 = 0$  имеет два различных корня.
3. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$  не имеет корней.
4. Найдите значения параметра  $m$ , при которых выражение

$$\text{а) } x^2 - 2(2 + m)x + 12 + m^2; \quad \text{б) } 2mx^2 + (2m - 4)x + \frac{m}{2} + 3$$

является полным квадратом.

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(2a - 1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$  имеет не более одного решения.
6. При каких  $a$  уравнение  $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$  имеет более одного корня?
7. При каких  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

8. При всех значениях  $a$  решите уравнение  $x^2 + 2ax - 1 = 0$ .
9. При всех значениях  $a$  решите уравнение  $x^2 - 2ax + 1 = 0$ .
10. При всех значениях  $a$  решите уравнение  $ax^2 + 3x - 1 = 0$ .
11. При всех значениях  $a$  решите уравнение  $(a - 1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$ .
12. Найдите, при каких  $p$  отношение корней уравнения  $x^2 + px - 16 = 0$  равно  $-4$ .
13. При каком целом значении  $k$  один из корней уравнения  $4x^2 - (3k + 2)x + k^2 - 1 = 0$  втрое меньше другого?
14. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых один корень уравнения

$$\text{а) } 9x^2 - 18(a - 1)x - 8a + 24 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 4(a - 2)x + 9a^2 + 5 = 0$$

вдвое больше другого.

15. При каких  $a$  сумма квадратов различных корней уравнения  $x^2 - ax + a + 1 = 0$  больше 1?
16. При каких  $a$  сумма корней уравнения  $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$  равна сумме квадратов корней?

17. При каких  $a$  сумма кубов различных корней уравнения  $x^2 - x + a = 0$  не больше 1?
18. При каких  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$  максимальна?
19. При каких  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - ax + a - 2 = 0$  минимальна?
20. При каких  $a$  разность корней уравнения  $2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$  равна 1?
21. При каких  $a$  один из корней уравнения  $8x^2 - 30x + a = 0$  равен квадрату другого?
22. При каком целом значении параметра  $b$  корни уравнения  $5x^2 + bx - 28 = 0$  удовлетворяют условию  $5x_1 + 2x_2 = 1$ ?
23. Найдите числа  $p$  и  $q$ , если известно, что они являются корнями уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .
24. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$  имеет только положительные корни.
25. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $(2 - x)(x + 1) = a$  имеет два различных неотрицательных корня.
26. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $(a - 3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$  имеет только отрицательные корни.
27. При каких  $m$  уравнение  $3mx^2 - (7m + 1)x + 2m + 1 = 0$  имеет корни разных знаков?
28. При каких  $a$  уравнение  $x^2 + (4 - 2a)x + a = 0$  имеет неотрицательный корень?
29. При каких  $a$  уравнения  $x^2 + ax + 8 = 0$  и  $x^2 + x + a = 0$  имеют общий корень?
30. При каком целом  $b$  уравнения  $2x^2 + (3b - 1)x - 3 = 0$  и  $6x^2 - (2b - 3)x - 1 = 0$  имеют общий корень?
31. При каких  $a$  уравнения

$$x^2 + (a^2 - 5a + 6)x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2(a - 3)x + a^2 - 7a + 12 = 0$$

равносильны?

32. При всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + 2ax + 1 \leq 0$ .
33. При всех  $a$  решить неравенство  $ax^2 - 2x + 1 > 0$ .
34. При всех  $a$  решить неравенство  $x^2 - 3ax + 2a^2 \geq 0$ .
35. При всех  $a$  решить неравенство  $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$ .
36. При каких  $a$  решения неравенства  $x^2 - (a^2 + 3a + 1)x + a^2 + 3a^3 \leq 0$  образуют отрезок, длина которого больше 3?
37. (МГУ, геологич. ф-т, 1980) Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

38. (МГУ, филологич. ф-т, 2004) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a - 1}{a + 5} = 0$$

не имеет решений?

39. (МГУ, химический ф-т, 2003) Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

40. (МГУ, физический ф-т, 1981) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

41. (МГУ, ф-т психологии, 1994) Известно, что  $x = 1, y = -1$  — одно из решений системы

$$\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти остальные решения системы.

42. (МГУ, ИСАА, 1992) Найти все  $a$ , при которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$$

принимает наименьшее значение.

43. (МГУ, мех.мат, 1989) Найти все  $a$ , при которых выражение

$$(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1),$$

где  $x_{1,2}$  — корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 + ax + a + \frac{1}{5},$$

принимает наименьшее значение.

44. (МГУ, социологич. ф-т, 2001) Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

45. (МГУ, химический ф-т, 2007) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

46. (МГУ, филологич. ф-т, 2000) Найти все  $a$ , при которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

47. (МГУ, географич. ф-т, 1992) Найти все тройки  $(a, b, c)$ , при которых уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственный корень  $x = -1$ , причём  $a + b + c = 1$ .

48. (МГУ, географич. ф-т, 1996) Найти все пары  $(a, b)$ , при которых ненулевые векторы

$$\vec{u} = (a(2 - b), 2a - 3, a(b - 2)) \quad \text{и} \quad \vec{v} = (2 - b, a - 2, b - 2)$$

коллинеарны, но не равны. Найти все  $a = b$ , при которых эти векторы перпендикулярны.

49. (МГУ, геологич. ф-т, 1979) Найти все  $\alpha$ , при которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$$

имеет единственный корень.

50. (МГУ, физический ф-т, 1988) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

51. (МГУ, мехмат, 1987) Найти все пары  $(a, b)$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти различных решений.

52. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении прямой  $y = ax + b$ , проходящей через те же точки.

53. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых для любого значения параметра  $b$  неравенство

$$(a + b)x^2 + (3b - 4a + 7)x + 4a - 2b - 6 \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

## Ответы

1.  $a > 1$ .
2.  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ .
3.  $a \in [2; 4)$ .
4. а)  $m = 2$ ; б)  $m = \frac{2}{5}$ .
5.  $a \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)$ .
6.  $a \in \{-3\} \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ .
7.  $a = \frac{1}{4}$ .
8.  $x = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ .
9. Если  $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ , то  $x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ ; если  $a \in (-1; 1)$ , то решений нет.
10. Если  $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right)$ , то решений нет; если  $a \in \left[-\frac{9}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ , то  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4a}}{2a}$ ; если  $a = 0$ , то  $x = \frac{1}{3}$ .
11. Если  $a \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}; +\infty\right)$ , то решений нет; если  $a \in \left[2 - \sqrt{2}; 1\right) \cup \left(1; 2 + \sqrt{2}\right]$ , то  $x = \frac{a \pm \sqrt{4a - a^2 - 2}}{a-1}$ ; если  $a = 1$ , то  $x = 0$ .
12.  $p = \pm 6$ .
13.  $k = 2$ .
14. а)  $a = -1$  или  $a = 2$ ; б)  $a = \frac{-64 \pm 3\sqrt{907}}{49}$ .
15.  $a \in (-\infty; -1) \cup (2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$ .
16.  $a = 1$  или  $a = \frac{1}{2}$ .
17.  $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$ .
18.  $a = 0$ .
19.  $a = 1$ .
20.  $a = -3$  или  $a = 9$ .
21.  $a = 27$  или  $a = -125$ .
22.  $b = -13$ .
23.  $p = q = 0$  или  $p = 1, q = -2$ .
24.  $a \in [2; 6]$ .
25.  $a \in \left[2; \frac{9}{4}\right)$ .
26.  $a \in [-6; -5)$ .

27.  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .
28.  $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ .
29.  $a = -6$ .
30.  $b = 2$ .
31.  $a = 3$  или  $a = 4$ .
32. Если  $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ , то  $x \in [-a - \sqrt{a^2 - 1}; -a + \sqrt{a^2 - 1}]$ ; если  $a = -1$ , то  $x = 1$ ; если  $a = 1$ , то  $x = -1$ ; если  $a \in (-1; 1)$ , то решений нет.
33. Если  $a \in (-\infty; 0)$ , то  $x \in \left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right)$ ; если  $a = 0$ , то  $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ ; если  $a \in (0; 1]$ , то  $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; +\infty\right)$ ; если  $a \in (1; +\infty)$ , то  $x$  любое.
34. Если  $a \in (-\infty; 0)$ , то  $x \in (-\infty; 2a] \cup [a; +\infty)$ ; если  $a = 0$ , то  $x$  любое; если  $a \in (0; +\infty)$ , то  $x \in (-\infty; a] \cup [2a; +\infty)$ .
35. Если  $a \in (-\infty; 1)$ , то  $x \in (a + 1; 4 - 2a)$ ; если  $a = 1$ , то решений нет; если  $a \in (1; +\infty)$ , то  $x \in (4 - 2a; a + 1)$ .
36.  $a \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$ .
37.  $a \neq 1$ .
38.  $a \in (-\infty; -5) \cup \left(-\frac{9}{7}; +\infty\right)$ .
39.  $a = 0$  или  $a = 1$ .
40.  $a = \pm\sqrt{2}$ .
41.  $x = -\frac{1}{4}$ ,  $y = \frac{5}{4}$ .
42.  $a = 2$ .
43.  $a = -\frac{1}{4}$ .
44.  $a \in (-2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (0; -2 + 2\sqrt{2})$ .
45.  $a \in (-1; 0] \cup \left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$ .
46.  $a \in \left\{-\frac{3}{4}, 0, \frac{2}{9}\right\}$ .
47.  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  и  $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .
48.  $a = 3$ ,  $b$  — любое;  $a \neq 1, \frac{3}{2}, 2$ ,  $b = 2$ .  $a = b = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ .
49.  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $\frac{\pi}{18} + 2\pi n$ ,  $\frac{13\pi}{18} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
50.  $a = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$ .
51.  $a = \pm 1$ ,  $b = -2$ ;  $a$  — любое,  $b = 2$ .
52.  $a = \frac{2}{5}$ ,  $b = -\frac{7}{5}$ .