

Тренировочные задачи

Необходимые условия в задачах с параметрами

1. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом b .

2. (МГУ, ф-т психологии, 1978) Найти все пары (a, b) , при которых равенство

$$\sin(ax + b) = a \sin x + b$$

выполняется для всех x .

3. (МГУ, мехмат, 1993) Найти все a , при которых неравенство

$$\log_5 (a \cos 2x - (1 + a^2 - \cos^2 x) \sin x + 4 - a) \leq 1$$

выполняется для всех x .

4. (МГУ, геологич. ф-т, 1996) Найти все a , при которых для любого b уравнение

$$\cos(b + ab + bx) + 2 \cos(b^2x) = 3a^2$$

имеет хотя бы один корень.

5. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) Найти все a , при которых для любого $b \geq 2$ неравенство

$$(b - 1)x + 2\sqrt{1 - (b - 1)^{-2}} < \left(\frac{a + 1}{b - 1} - b + 1 \right) \cdot \frac{1}{x}$$

выполняется при всех $x < 0$.

6. (МГУ, мехмат, 1989) Найти все a , при которых для любого b система

$$\begin{cases} 2(1 + |y|)^a + (b^2 - 2b + 2)^x = 3, \\ xy(x + b - 1) = 2a^2 - 3a + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

7. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Найти все значения a , при которых для любого b уравнение

$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$

имеет хотя бы один корень.

8. (МГУ, экономич. ф-т, 1978) Найти все значения a , при которых неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется для всех x .

9. (МГУ, ИСАА, 1993) Найти все значения a , при которых неравенство

$$x^2 + 2|x - a| \geq a^2$$

справедливо для всех x .

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) Определите, 1) при каких значениях a существует такое число b , что уравнение

$$5 \cos x + \sin x + \cos(x - b) = a$$

имеет решения; 2) при каких a это уравнение имеет решения для любого b .

11. (МГУ, ф-т гос. управления, 2005) Найдите все значения a , для которых при любом положительном b уравнение

$$a \log_{\frac{1}{x}-2} 4 = \log_2 \left(\frac{1}{x} - 2 \right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $1/3$.

12. (МГУ, ИСАА, 1996) При каких значениях a неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x + a - 5}{5} > 0$$

выполняется для всех x ?

13. (МГУ, экономич. ф-т, 1977) Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых таких пар (x, y) , что $|x| = |y|$.

14. (МГУ, ф-т фундамент. медицины, 2003) Найти все значения b , при которых для любой пары чисел (s, t) функция

$$f(x) = tx^4 - s(b^2 - 4)x^3 + bx - s - 2$$

удовлетворяет хотя бы одному из условий $f(1) > -2$, $f(-1) < 2$.

15. (МГУ, мехмат, 1986) Найти все a , при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b - 6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) .

ОТВЕТЫ

1. $a = 1$.
2. $(1, 0), (-1, 0), (0, 0)$.
3. $a \in [0; 1)$.
4. $a = -1$.
5. $a \leq 0$.
6. $a = \frac{1}{2}, 1$.
7. $a = \frac{5}{2}$.
8. $a > \frac{3}{82}$.
9. $a \in [-1; 1]$.
10. $a \in [-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1]$; б) $a \in [-\sqrt{26} + 1; \sqrt{26} - 1]$.
11. $a \geq 0$.
12. $a \in (\frac{15}{2}; 8) \cup (12; +\infty)$.
13. $a = 50$.
14. $b = 2$.
15. $a \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$.