Тренировочные задачи

Минимаксные задачи с параметрами

1. (*МГУ, геологич. ф-т, 1990*) Найти все пары (a,b), при которых уравнение

$$\left(3x^2-2a^2+ab\right)^2+\left(3a^2-ab+2b^2-12x\right)^2+4=4x-x^2$$

имеет хотя бы один корень.

2. (*МГУ, физический ф-т, 1996*) При каждом a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

3. (*МГУ, ИСАА, 1994*) Найти все a, при которых уравнение

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}-3$$

имеет хотя бы один корень.

4. (*МГУ, физический ф-т, 2001*) При каждом α найти все корни уравнения

$$\cos 2x+2\sin^2(x+\alpha)+2=\sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку $[\pi;2\pi]$.

5. (*МГУ, мехмат, 1993*) Найти все $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, при которых уравнение

$$\sqrt{2\cos(x+\alpha)-1}=\sin 6x-1$$

имеет хотя бы один корень.

6. (*МГУ, химический ф-т, 2001*) При каждом a решить уравнение

$$\sin^2x+\sin^2 2x+\sin^2 3x-2a(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)+\cos x-\cos 3x+2a^2=0.$$

7. (*МГУ, ВМК, 1981*) При каждом a решить уравнение

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3(2x-x^2)+\left(1+(3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

8. (*МГУ, ВМК, 1989*) Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4\pi a}=\sqrt{(x-5a+10\pi-34)\left(|\pi-x|-a+\pi+2\right)}$$

имеет хотя бы один целочисленный корень.

9. (*МГУ, геологич. ф-т, 1995*) При каждом a решить систему

$$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ \dfrac{\log_2\left(|a|x^2 - 3x + 4\right)}{\log_2(-3x+4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}. \end{cases}$$

10. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*) Найти все a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

11. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1983*) Найти все $a \in (2;5)$, при которых уравнение

$$\log_2\left(3 - |\sin ax|\right) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[2;3]$.

12. (*МГУ, филологич. ф-т, 1985*) Для каждого a решить уравнение

$$3\cos x \sin a - \sin x \cos a - 4\cos a = 3\sqrt{3}\,.$$

13. (*МГУ, ф-т психологии, 1988*) Найти наибольшее a, при котором неравенство

$$\sqrt{a^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{a}}{8x - x^2 - 16} \geqslant -\frac{2}{3}a|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

14. (*МГУ, ФНМ, 2004*) Найти все b, при каждом из которых неравенство

$$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^x + (b^4 + 12 - 6b^2)\cdot\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x + 9^t + \frac{b^2}{4} + b\cdot 3^t - \sqrt{12} \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение (t, x).

15. (*МГУ, ФНМ, 2002*) Найти все a, при каждом из которых неравенство

$$4^x + 4^{-x} + 8\left|2^x + 2^{-x} - a\right| + 11a < 26 + 2a\left(2^x + 2^{-x}\right)$$

имеет хотя бы одно решение.

16. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1994*) Найти все пары (a, b), при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1, \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. (*МГУ, географич. ф-т, 1986*) Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + y^2 - 2a(x + y)$$

при условии $\cos \frac{\pi x y}{2} = 1$.

18. (*МГУ, географич. ф-т, 1985*) Найдите все числа a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел (x, y).

19. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1988*) Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

20. (*МГУ, экономический ф-т, 2004*) Найти наибольшее значение ω, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4\sin^2 y - \omega = 16\sin^2 \dfrac{2x}{7} + 9\operatorname{ctg}^2 \dfrac{2x}{7}, \\ \left(\pi^2 \cos^2 3x - 2\pi^2 - 72\right) y^2 = 2\pi^2(1 + y^2)\sin 3x. \end{cases}$$

21. (*МГУ, ВМК, 1999*) При каких a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

22. (*МГУ, химический ф-т, 1994*) При каких q разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \dfrac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin \dfrac{\pi x}{2}\,? \end{cases}$$

Найдите её решения.

23. (*МГУ, мехмат, 1978*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

24. (*МГУ, мехмат, 1995*) Найти все $\alpha \in [0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2z(x+y+z)-\sin\alpha=0, \\ (x+1)\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+y^2\sqrt{x}+\alpha^2\sqrt{z}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

25. (*МГУ, мехмат, 1988*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{z^2}\,, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}\,, \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,, \\ z > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

26. (*МГУ, биологич. ф-т, 2003*) Найти все значения b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (\log_b f(x)-1)^2+\left(y^2-5\cdot10^3\cdot y+2b\right)^2=0, \\ z^2-\left(b-2\cdot10^6\right)\cdot z+25\cdot10^{10}=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x)=|x|+\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\ldots+\left|x-104^2\right|.$$

Ответы

1. $(2,-2)$, $(-2,2)$, $\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

2. Если $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $x=\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; если $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, то $x=\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$; при остальных a решений нет.

3. $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

4. Если $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$, то $x=\frac{3\pi}{2}$; при остальных α решений нет.

5. $\alpha=-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}$.

6. Если $a=0$, то $x=\pi+2\pi n$ или $x=\frac{2\pi n}{3}$ $(n\in\mathbb{Z})$; если $a\neq0$, то решений нет.

7. Если $a=\frac{1}{3}$, то $x=1$; при остальных a решений нет.

8. $a\in\{2\pi-8, 2\pi-1, 2\pi\}$.

9. Если $a\neq0$, то $x=0$; если $a=0$, то $x=0,-1$.

10. $a=0$ или $a=1$.

11. $a=\frac{9\pi}{13}, \frac{15\pi}{13}$.

12. Если $a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; если $a = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$; при остальных a решений нет.

13. $\frac{1}{9}$.

14. $b = -\sqrt{3}$.

15. $a \in (-8; -4) \cup (7; +\infty)$.

16. $a = 2$, $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$; $a = -2$, $b \in \mathbb{R}$.

17. Если $a \in \left(0; 4 - 2\sqrt{2}\,\right]$, то наименьшее значение равно $-a^2$; если $a \in \left(4 - 2\sqrt{2}; 2\right)$, то наименьшее значение равно $8 - 8a$.

18. $a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.

19. $p = -2$ или $p = \frac{1}{2}$.

20. -14.

21. $a \in [1; 2) \cup (2; 3]$.

22. Система разрешима при $q = \pm 4$. Если $q = 4$, то $x = -3$, $y = 0$; если $q = -4$, то $x = 1$, $y = 0$.

23. $a < -1$.

24. $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

25. $a \in [-2\pi; 0) \cup (2\pi; 4\pi]$.

26. $b \in [286624; 1000000] \cup [3000000; 3125000]$.