

Тренировочные задачи

Линейные уравнения и неравенства с параметрами

1. При всех значениях a решите уравнение $0,2x - a = 1$.
2. При всех значениях a решите уравнение $ax = 0$.
3. При всех значениях a решите уравнение $(a - 1)x = a + 3$.
4. При всех значениях a решите уравнение $(a^2 - 16)x = a - 4$.
5. При каких a и b уравнение $(a + 5)x = 2b - 6$ имеет бесконечно много решений?
6. При каких k и m уравнение $(k^2 + 2k - 3)x = m + 4$ не имеет решений?

7. При каких b система

$$\begin{cases} -4x - 4by = b + 1, \\ (b + 1)x + 2y = b + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

8. При каких m система

$$\begin{cases} (m - 2)x + 27y = 4,5, \\ 2x + (m + 1)y = -1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

9. Найдите все значения p , при которых система

$$\begin{cases} 2x + (9p^2 - 2)y = 3p, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

10. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

11. Найдите все такие b , чтобы при любом значении a система

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

12. При всех a решить неравенство $ax \leq 0$.

13. При всех a решить неравенство $(a^2 - 3a + 2)x \geq a - 1$.

14. При каких a из неравенства $x + a \geq 1$ следует неравенство $3x > a$?

15. При каких a из неравенства $2x + a < 2$ следует неравенство $x < -2$?

16. При каких a неравенство $a - x \leq 3$ является следствием неравенства $x > 4$?

17. При каких a неравенства $2x + a < 3$ и $x - 4a < -1$ равносильны¹?

18. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x - a \geq 1, \\ x + a < 3 \end{cases}$$

имеет решения?

19. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} 2x + 3a < 1, \\ 2 - x < a \end{cases}$$

не имеет решений?

20. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} a - 3x \geq 5, \\ a \leq x + 3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

21. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x + 4a \leq 7, \\ 2x - a \geq 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

22. (МГУ, физический ф-т, 1981) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

23. (МГУ, физический ф-т, 1977) Найти все a , при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x > y$.

24. (МГУ, физический ф-т, 1982) Найти все a , при которых уравнение

$$5x - 17a = 21 - 5ax$$

имеет корень, больший 3.

¹Напомним, что два неравенства называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если множества их решений совпадают. Иными словами, равносильные неравенства являются следствиями друг друга.

25. (МГУ, экономический ф-т, 1978) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2, \\ 2ax + (a + 1)y = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

26. (МГУ, ВМК, 2002) При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

27. (МГУ, ВШБ, 2004) Найдите все значения параметра $p \in [-4; 4]$, при которых неравенство

$$(p - 2) \cdot ((x + 1)(p - 3) + 2x) > 0$$

выполняется при любых $x \geq 0$.

28. (МГУ, физический ф-т, 1998) При каждом a решить неравенство

$$\log_a(3a^x - 5) < x + 1.$$

29. (МГУ, мехмат, 1995) Найти все a , при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $y > 1 - x$.

Ответы

1. $x = 5(a + 1)$.

2. Если $a \neq 0$, то $x = 0$; если $a = 0$, то x любое.

3. Если $a \neq 1$, то $x = \frac{a+3}{a-1}$; если $a = 1$, то решений нет.

4. Если $a \neq -4$ и $a \neq 4$, то $x = \frac{1}{a+4}$; если $a = -4$, то решений нет; если $a = 4$, то x любое.

5. $a = -5, b = 3$.

6. $k = 1$ или $k = -3$, и при этом $m \neq -4$.

7. $b = -2$ или $b = 1$.

8. $m = -7$.

9. $p = -\frac{2}{3}$.

10. $a = -\frac{2}{3}$.

11. $b = 3$.

12. Если $a > 0$, то $x \leq 0$; если $a < 0$, то $x \geq 0$; если $a = 0$, то x любое.
13. Если $a < 1$ или $a > 2$, то $x \geq \frac{1}{a-2}$; если $1 < a < 2$, то $x \leq \frac{1}{a-2}$; если $a = 1$, то x любое; если $a = 2$, то решений нет.
14. $a < \frac{3}{4}$.
15. $a \geq 6$.
16. $a \leq 7$.
17. $a = \frac{5}{9}$.
18. $a < 1$.
19. $a \geq -3$.
20. $a = 2$.
21. $a < \frac{14}{9}$.
22. $a = -2$.
23. $a < 6$.
24. $a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.
25. $a \neq 0$.
26. $b = -\sqrt{2}$.
27. $p \in [-4; 1] \cup (3; 4]$.
28. Если $a \in (0; 1)$, то $x \in (-\infty; \log_a \frac{5}{3-a})$; если $a \in (1; 3)$, то $x \in (\log_a \frac{5}{3}; \log_a \frac{5}{3-a})$; если $a \in [3; +\infty)$, то $x \in (\log_a \frac{5}{3}; +\infty)$; при остальных a решений нет.
29. $a \neq -3$.