

Тренировочные задачи

Область значений функции

1. (МГУ, экономич. ф-т, 1985) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}.$$

2. (МГУ, химический ф-т, 1991) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}.$$

3. (МГУ, экономич. ф-т, 1998) Найти все a , при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$$

содержится в интервале $(-3; 2)$.

4. (МГУ, ф-т психологии, 1999) Найти все a , при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{3x + a}{x^2 + 5x + 7}$$

содержит промежуток $(-1; 3]$. При каждом таком a найти область значений этой функции.

5. (МГУ, геологич. ф-т, 1988) Найти все a , при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{\sin x + 2(1 - a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

6. (МГУ, ф-т психологии, 1997) Найти все a , при которых уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет хотя бы один корень.

7. (МГУ, физический ф-т, 2000) Найти все a , при которых уравнение

$$25^x - (2a + 5) \cdot 5^{x-\frac{1}{x}} + 10a \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два корня.

8. (МГУ, экономич. ф-т, 1978) Найти все a , при которых неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется для всех x .

9. (МГУ, мехмат, 2001) Найти все x , которые не являются корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4} (x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком a .

10. (МГУ, ф-т психологии, 1991) При каждом $a \geq \frac{1}{2\pi}$ решить уравнение

$$\cos \frac{2x + a}{2x^2 + 2ax + \frac{5a^2}{2}} = \cos \frac{2x - a}{2x^2 - 2ax + \frac{5a^2}{2}}.$$

11. (МГУ, ВМК, 2004) Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$81^x - 8 \cdot 27^x + (20 - 2a) \cdot 9^x + (8a - 21) \cdot 3^x + a^2 - 5a + 6 = 0.$$

12. (МГУ, ф-т психологии, 2005) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4 \sin x + a}{4a - 2 \sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2006) Найдите все значения a , при которых наибольшее значение функции

$$f(x) = 2x^2 + x(5 - 3a) + a^2 - 3a + 4$$

на отрезке с концами в точках $a - 1$ и -4 минимально. Укажите это значение.

14. (МГУ, химический ф-т, 2008) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^4 + (a + 1)x^3 + (2a + 1)x^2 - (a + 1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней.

Ответы

1. $\frac{7}{23}$.

2. $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

3. $a \in (3 - 2\sqrt{5}; \sqrt{10} - 2)$.

4. $a = 9$; $E(f) = [-1; 3]$.

5. $a \in [\frac{1}{3}; \frac{3}{4}] \cup (\frac{3}{4}; \frac{33}{32}]$.

6. $a \geq 17$.

7. $a \in (0; \frac{1}{50}) \cup (\frac{25}{2}; +\infty)$.

8. $a > \frac{3}{82}$.

9. $x \in (-\infty; -\frac{8}{7}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; +\infty)$.

10. $x = 0, \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

11. При $a < -\frac{17}{4}$ решений нет; при $a = -\frac{17}{4}$ одно решение; при $a \in (-\frac{17}{4}; \frac{3}{4})$ два решения; при $a = \frac{3}{4}$ три решения; при $a \in (\frac{3}{4}; 2)$ четыре решения; при $a \in [2; 3)$ три решения; при $a \geq 3$ два решения.

12. $a \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

13. $a = -5$. Искомое значение равно -4 .

14. $a > 3 + 2\sqrt{5}$.