

Тренировочные задачи

Параллельность. Сумма углов треугольника

1. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.
2. Отрезки AB и CD пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.
3. Две параллельные прямые пересечены третьей. Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны.
4. Найдите углы треугольника, если они относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов этого треугольника.

$40^\circ, 60^\circ, 80^\circ; 7:6:5$

5. Докажите теорему о внешнем угле треугольника (*внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*)
6. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 120° и 150° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

7. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние.
8. AD — биссектриса треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AB , причём $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.
9. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллельна его основанию.
10. Прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C . Докажите, что $AC = AB$.
11. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.
12. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
13. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC , причём $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAS$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.
14. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол B вдвое больше угла A и BD — биссектриса. Докажите, что $AD = BC$.

15. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M так, что $AB = BM$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

20°, 50°, 110°

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN , если $\angle B = 50^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.

35°

17. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M так, что $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM , если $\angle C = 25^\circ$.

25°

18. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC . Найдите угол B .

36°

19. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

20. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.

21. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M . Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

22. BK — биссектриса треугольника ABC , причём $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC .

10°

23. Один из углов треугольника равен α . Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

90° - $\alpha/2$

24. Один из углов треугольника равен α . Найдите угол между высотами, проведёнными из вершин двух других углов.

180° - α

25. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H , причём $\angle AHB = 120^\circ$. Биссектрисы BL и CM пересекаются в точке K , причём $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол B .

40°

26. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы.

27. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, лежащий против этого катета, равен 30° .

28. Гипотенуза прямоугольного треугольника с углом 30° равна 4. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, опущенная из вершины прямого угла.

8 и 1

29. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108° . Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D , пересекает сторону AC в точке E . Докажите, что $DE = DB$.

30. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Биссектриса AK , медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

09 и 09

31. *Свойство прямоугольного треугольника.* Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Докажите.

32. *Признак прямоугольного треугольника.* Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный. Докажите.

33. В прямоугольном треугольнике имеется угол 30° . Докажите, что высота и медиана, проведённые к гипотенузе, делят прямой угол на три равных угла.

34. В прямоугольном треугольнике имеется угол 30° . Докажите, что отрезок перпендикуляра, проведённого к гипотенузе через её середину до пересечения с катетом, вдвое меньше большего катета.

35. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с углом 15° , если высота, проведённая из вершины прямого угла, равна 1.

4

36. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM . Найдите угол DMC .

091 иги 09

37. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp CN$.

38. Угол A треугольника ABC равен 40° . Биссектриса угла A и биссектриса внешнего угла при вершине C пересекаются в точке M . Найдите угол BMC .

02

39. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN . Докажите, что $EM + FN = AB$.

40. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Точка P — середина KD . Докажите, что $CP \perp AB$.

41. Найдите сумму внутренних углов: а) четырёхугольника; б) выпуклого пятиугольника; в) выпуклого n -угольника.

□081 · (z - u) (я ; 079 (9 ; 099 (в

42. Внутри угла, равного 50° , взята точка M , и из неё опущены перпендикуляры MN и MP на стороны угла. Найдите угол NMP .

□081

43. Вычислите сумму внешних углов выпуклого n -угольника (взятых по одному при каждой вершине).

□099

44. Найдите сумму пяти углов при вершинах пятиконечной звезды (рис. 1).

□081

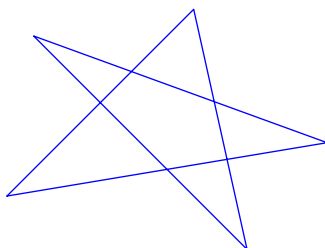


Рис. 1. К задаче 44

45. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и M так, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

□45

46. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M так, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

□35°

47. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.

48. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка L делит диагональ AC в отношении $3 : 1$ (считая от A). Найдите угол KLD .

□06

49. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

50. Высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

06 ' 09 ' 08

51. В треугольнике ABC биссектриса AD равна 2, $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Найдите $BC - AB$.

7

52. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

53. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AD = AE$, $AB = AC$ и $\angle DAC = \angle ABE + \angle AEB$. Докажите, что CD в два раза больше медианы AK треугольника ABE .

54. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

09 ' 09 ' 801

55. В треугольнике ABC с углом B , равным 120° , биссектрисы AK , BL и CM пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle LMO = 30^\circ$.