

Тренировочные задачи

Уравнения и неравенства с модулем

1. Решить уравнение: $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

$\{0\}$

2. (МГУ, физический ф-т, 1983) Решить уравнение: $|x^2 - 12| = 4$.

$\{2, 4\}$

3. Решить уравнение: $|x^2 - 3x + 2| = 3x - 2 - x^2$.

$\{1\}$

4. Решить уравнение: $|x^2 + x - 3| = |5x - 4|$.

$\{-1, 2, 4\}$

5. (МГУ, химический ф-т, 2001) Решить уравнение:

$$\left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \left| \frac{x+1}{x+2} \right|.$$

$\{0\}$

6. Решите неравенство, используя геометрический смысл модуля:

а) $|x - 6| \leq 4$;

б) $|2x + 3| > 11$.

$(-\infty; -4) \cup (2; \infty)$

7. (МГУ, физический ф-т, 1996) Решить неравенство: $-1 < |x^2 - 7| < 29$.

$(-9; -1)$

8. (МГУ, географич. ф-т, 1997) Решить неравенство:

$$\frac{|x-1| + 10}{4|x-1| + 3} > 2.$$

$(\frac{1}{11}; \frac{1}{8})$

9. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) Решить неравенство:

$$\frac{1}{|x+1| - 1} \geq \frac{1}{|x+1| - 2}.$$

$(1; 0) \cup (2; \infty)$

10. (МГУ, физический ф-т, 1990) Решить уравнение: $x^2 - 4|x| - 1 = 0$.

$$\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

11. (МГУ, географич. ф-т, 1987) Решить неравенство: $x^2 + 2|x| < 8$.

$$(x-2)^2$$

12. (МГУ, ВМК, 1994) Решить уравнение:

$$\left(4|x-1| + \frac{1}{2}\right)^2 = 11(x-1)^2 + \frac{5}{4}.$$

$$\frac{x}{2} + 1$$

13. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - |x+1| > 5$;

б) $x^2 - 4x + 8 - 5|x-2| \leq 0$.

$$[9; 3] \cap [1; 2] \cup (9; \infty + 2) \cap (4; \infty -) \cup \{e\}$$

14. (МГУ, химический ф-т, 2000) Решить уравнение: $|x| = 2 - x$.

$$1$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 1990) Решить уравнение:

$$-\frac{|x|}{x} - x = \frac{x^2}{2} + 1.$$

$$x-2$$

16. (МГУ, ИСАА, 1998) Решить неравенство:

$$\frac{3|x| - 11}{x - 3} > \frac{3x + 14}{6 - x}.$$

$$(\infty + 6) \cup (9; 2) \cup (2; 3) \cup (2; 7 -)$$

17. (МГУ, социологич. ф-т, 2001) Решить неравенство:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

$$\left[\frac{x}{1}; 0\right) \cap (0; 1-)$$

18. (МГУ, мехмат, 1985) Решить неравенство:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}.$$

$$(\infty + 1) \cap (1; 1-) \cap [3; \infty -)$$

19. (МГУ, экономич. ф-т, 1981) Решить уравнение: $x^2 - 6x + 8 + |x - 4| = 0$.

3; 4

20. (МГУ, экономич. ф-т, 2000) Решить уравнение: $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$.

1; 4

21. (МГУ, ВМК, 1998) Решить неравенство:

$$2x > \frac{5x + 3}{|x + 2|}.$$

$(\infty + ; \frac{3}{8}) \cap (1 - ; 2 -) \cap (2 - ; \frac{1}{29} + 6 -)$

22. (МГУ, биологич. ф-т, 1999) Решить неравенство:

$$\frac{3}{|x - 1|} \geq 2x + 5.$$

$[\frac{1}{8} - \frac{1}{29} ; 1) \cap (1 ; \frac{3}{4}] \cap [2 - ; \infty -)$

23. (МГУ, социологич. ф-т, 1999) Решить неравенство:

$$\frac{2|2 - x|}{2 - |x|} \leq |x - 2|.$$

$(\infty + ; 2) \cap \{0\} \cap (2 - ; \infty -)$

24. (МГУ, географич. ф-т, 2000) Решить уравнение: $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.

3; 25

25. (МГУ, биологич. ф-т, 1995) Решить уравнение: $|x - 1| + |2x - 3| = 2$.

2; $\frac{3}{2}$

26. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) Решить неравенство: $3|x - 2| + |5x - 4| \leq 10$.

$[\frac{2}{3} ; 0]$

27. (МГУ, географич. ф-т, 1996) Решить уравнение: $|5x - 3| - |7x - 4| = 2x - 1$.

$[\frac{1}{4} ; \infty -)$

28. (МГУ, филологич. ф-т, 1991) Решить неравенство:

$$\frac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1.$$

$(007 ; 99 -) \cap (661 - ; \infty -)$

29. (МГУ, геологич. ф-т, 1985) Решить неравенство:

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geq 1.$$

$$(\infty+; 2) \cap (0; \infty-)$$

30. (МГУ, ИСАА, 1992) Решить неравенство:

$$\frac{|x+3|-1}{4-2|x+4|} \geq -1.$$

$$(\infty+; 2-) \cap (2-; 9-) \cap [8-; \infty-)$$

31. (МГУ, ф-т психологии, 1979) Решить неравенство:

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|.$$

$$[3 \wedge + 2-; 2-) \cap (4-; 9-]$$

32. (МГУ, филологич. ф-т, 1988) Решить систему:

$$\begin{cases} 2|x-2| + 3|y+1| = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3}-; \frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$$

33. (МГУ, ИСАА, 1997) Решить уравнение: $4|x+1|-1 = 3|2x+5|-2|x+5|$.

$$\left\{\frac{1}{5}-\right\} \cap [9-; \infty-)$$

34. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) Решить неравенство:

$$|x^2 + 3x| + |x + 5| \leq x^2 + 4x + 9.$$

$$(\infty+; 1-] \cap [2-; 2-]$$

35. (МГУ, экономич. ф-т, 2000) Решить уравнение:

$$3\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7 + x + \left(\sqrt{-x^2 - 5x - 4}\right)^2.$$

$$\emptyset-$$

46. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) Решить неравенство: $|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|$.

$$(\infty+; 7] \cap [\frac{7}{51}; 0]$$

47. (МГУ, химический ф-т, 2001) Решить неравенство:

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

$$(\infty+; 1) \cap (1; 0)$$

48. Решить неравенство: $||x^3 - x - 1| - 5| \geq x^3 + x + 8$.

$$[9\sqrt[3]{8} - ; \infty-)$$

49. (МГУ, мехмат, 2000) Решить неравенство:

$$\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}.$$

$$(2; 4) \cup (4; 7)$$

50. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все x , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|(|x-5| - |x-3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x|(|x| - |x-8|) + 24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

$$[3; 5]$$