

Тренировочные задачи

Иррациональные уравнения и неравенства

1. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq -2$.

$$(\infty+; 1] \cap [8-; \infty-)$$

2. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) Решить неравенство: $\sqrt{4x - 3 - x^2} \neq 0$.

$$(8; 1)$$

3. (МГУ, социологич. ф-т, 1997) Решить уравнение: $\sqrt{-3x + 3} = x - 1$.

$$1$$

4. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$.

$$1$$

5. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 7x + 1} = \sqrt{2x^2 - 15x + 8}$;

б) $\sqrt{2x^2 + x - 4} = \sqrt{3x + 3}$.

$$\frac{7}{91^{1+1}} (9; 2 (8$$

6. Решить неравенство:

а) $\sqrt{2 - x} < \sqrt{3x^2 - 2x - 2}$;

б) $\sqrt{3x - \frac{23}{4}} \geq \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

$$\left[\frac{7}{91^{1+1}}; 2 \right] (9; \left[2; \frac{8}{4} \right] \cap (1-; \infty-) (8$$

7. (МГУ, мехмат, 1980) Решить уравнение: $(x^2 + x - 6)\sqrt{x + 1} = 0$.

$$2; 1-$$

8. (МГУ, экономич. ф-т, 1986) Решить уравнение: $\sqrt{3x + 4}(9x^2 + 21x + 10) = 0$.

$$\frac{8}{2} - \frac{8}{4} -$$

9. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) Решить уравнение: $(x + 1)\sqrt{x^2 - 3x - 6} = 2x + 2$.

$$9; 2-$$

10. (МГУ, ф-т психологии, 1981) Решить систему:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right), (2, 1)$$

11. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) Решить систему:

$$\begin{cases} x^3 \sqrt{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{2}, 0\right), (12, 12)$$

12. (МГУ, геологич. ф-т, 1988) Решить неравенство: $(x^2 + 8x + 15) \sqrt{x + 4} \geq 0$.

$$\{-4\} \cup [-3; +\infty)$$

13. (МГУ, экономич. ф-т, 1986) Решить неравенство:

$$\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} (8x^2 - 6x + 1) \geq 0.$$

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$$

14. (МГУ, физический ф-т, 1996) Решить неравенство:

$$\frac{x - 2}{x\sqrt{10 + 3x - x^2}} > 0.$$

$$(-2; 0) \cup (2; 5)$$

15. (МГУ, биологич. ф-т, 2001) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5x - 84}}{x - 7} \geq 0.$$

$$(\infty; 7) \cup \{12\}$$

16. (МГУ, ИСАА, 2001) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{6 + 3\sqrt{3}x - 2x^2} \leq 0.$$

$$\left(\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}; -\infty\right)$$

17. (МГУ, мехмат, 1983) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

{ε} ∩ [1-;z-]

18. (МГУ, ф-т почвоведения, 1997) Решить уравнение: $x = \sqrt{8x+9}$.

6

19. (МГУ, географич. ф-т, 1993) Решить уравнение: $\sqrt{13-2x} = 5-x$.

z

20. (МГУ, геологич. ф-т, 1996) Решить уравнение: $\sqrt{3x-5} = x-11$.

81

21. (МГУ, ИСАА, 1997) Решить уравнение: $\sqrt{3}(x+2) - \sqrt{9+2x} = 0$.

$\frac{\varepsilon}{1}$ -

22. (МГУ, географич. ф-т, 2000) Решить уравнение: $\sqrt{3x-2} = 2x-4$.

$\frac{8}{19+13\sqrt{13}}$

23. (МГУ, физический ф-т, 1988) Решить уравнение: $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$.

1-

24. (МГУ, географич. ф-т, 1982) Решить уравнение: $x + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5$.

z-

25. (МГУ, ф-т психологии, 1996) Решить уравнение: $\sqrt{2x^2 - 21x + 4} = 2 - 11x$.

0

26. (МГУ, географич. ф-т, 1999) Решить уравнение: $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$.

$\varepsilon^{\wedge} + z$

27. (МГУ, физический ф-т, 1985) Решить уравнение: $\sqrt{x^4 - 2x + 5} = 1 - x$.

ε^{\wedge} -

28. (МГУ, ФНМ, 2001) Решить уравнение: $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$.

$\frac{z}{1-\varepsilon^{\wedge}}$

29. (МГУ, физический ф-т, 1999) Решить уравнение: $\sqrt{x+2}\sqrt{2x+1} = x+4$.

$\frac{z}{99^{\wedge} + \varepsilon}$

30. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) Решить уравнение: $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.

$\frac{6}{2}$

31. (МГУ, ф-т психологии, 2001) Решить уравнение: $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}$.

$\frac{7}{8\sqrt{9+8}}$

32. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) Решить уравнение: $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$.

8

33. (МГУ, физический ф-т, 2000) Решить уравнение: $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.

$\frac{7}{2\sqrt{1+1}}$

34. (МГУ, физический ф-т, 1979) Решить неравенство: $\sqrt{x^2+x-2} < x$.

$(2; 1]$

35. (МГУ, геологич. ф-т, 1984) Решить неравенство: $\sqrt{2x^2-18x+16} < x-4$.

$(0; 8]$

36. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) Решить неравенство: $\sqrt{x^2+x-6} > -x-1$.

$(\infty; 2] \cap (2; \infty)$

37. (МГУ, геологич. ф-т, 1992) Решить неравенство: $\sqrt{10x-1} + 1 \leq 5x$.

$(\infty; \frac{9}{2}\sqrt{2}]$

38. (МГУ, биологич. ф-т, 1980) Решить неравенство: $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

$[5; 5]$

39. (МГУ, экономич. ф-т, 1983) Решить неравенство: $4(x-1) < \sqrt{3x^2+19x+20}$.

$(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}] \cap [5; \infty)$

40. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) Решить неравенство: $\sqrt{24-10x+x^2} > x-4$.

$(-4; \infty)$

41. (МГУ, экономич. ф-т, 1998) Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1.$$

$(\frac{9}{8}\sqrt{1+1}; 1] \cap [2; \infty)$

42. (МГУ, ф-т психологии, 1993) Решить неравенство:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\left(\frac{9}{\sqrt{3}-\varepsilon}; 0\right]$$

43. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Решить неравенство:

$$\sqrt{4x-x^2-3} \geq \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}.$$

$$\varepsilon$$

44. (МГУ, ф-т психологии, 1999) Решить неравенство:

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

$$\left(\frac{0\varepsilon}{69\sqrt{+2\varepsilon}}; \frac{4}{7}\right)$$

45. (МГУ, физический ф-т, 2001) Решить неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

$$\left(\varepsilon; \frac{7}{\sqrt{+8}}\right) \cap (7; \infty-)$$

46. (МГУ, ИСАА, 1993) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \geq 1.$$

$$(\varepsilon; 1]$$

47. (МГУ, ф-т психологии, 1983) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1.$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{+1}}; 1\right) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{+1}}; 1\right)$$

48. (МГУ, ф-т психологии, 1998) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x} \leq 0.$$

$$\left(8; \frac{6}{\sqrt{+1}}\right] \cap \left(\frac{6}{2}; \frac{7}{2}-\right]$$

49. (МГУ, ВМК, 1982) Решить неравенство:

$$\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x + 2.$$

$$\left[\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right) \cap \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right]$$

50. (МГУ, мехмат, 1990) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{1 - x^3} - 1}{1 + x} \leq x.$$

$$[1; 0] \cap (1 - ; 2 -]$$

51. (МГУ, географич. ф-т, 1996) Решить уравнение:

$$\sqrt{2 - x^2} = |x| - 1.$$

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$$

52. (МГУ, физический ф-т, 2000) Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2 + |x - 4|} - 18 > x - 4.$$

$$(\infty + ; \frac{6}{83}) \cap \left(\frac{2}{23} \in \mathbb{Z}; \infty - \right)$$

53. (МГУ, физический ф-т, 1997) Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2 + x + 4} \leq 2x + |3x - 2|.$$

$$(\infty + ; \frac{8}{2}] \cap [0; \infty -)$$

54. (МГУ, ИСАА, 1999) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3} - 3}{|x + 2| - 5} \geq 1.$$

$$(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \cap (2 - ; \infty -)$$

55. (МГУ, мехмат, 1996) Решить неравенство:

$$\frac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|3 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 3}.$$

$$[2; \frac{7}{8}]$$

56. (МГУ, мехмат, 1980) Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

(1;2)

57. (МГУ, химический ф-т, 1977) Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$$

($\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$)

58. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Решить систему:

$$\begin{cases} 4x + 5y = \sqrt{16x^2 - 25y^2}, \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$$

($\frac{9}{8}, 2$) ($\frac{9}{4}, 1$) (0;1)

59. (МГУ, мехмат, 1995) Решить уравнение:

$$\frac{|x^3| - |5x|}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0.$$

$\frac{5}{2}$

60. (МГУ, мехмат, 1995) Решить неравенство:

$$\frac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x + 15} + 2x} \geq 0.$$

($\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$) \cap ($\frac{2}{3}, \frac{7}{15}$)

61. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Решить уравнение:

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

2

Задачи 62–86 решите с помощью замены переменной.

62. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Решить неравенство:

$$30 > \frac{x}{60 - \sqrt{x}}$$

($\infty + ; 009\text{E}$) \cap (006;0)

63. (МГУ, геологич. ф-т, 1991) Решить неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{4-\sqrt{x}}.$$

$(\infty+;9\Gamma) \cap \{0\}$

64. (МГУ, ф-т почвоведения, 1996) Решить неравенство:

$$\frac{2}{2-\sqrt{x+3}} \leq 1.$$

$(\infty+;1) \cap \{8-\}$

65. (МГУ, химический ф-т, 1993) Решить уравнение: $\sqrt{x+4} = x+2$.

0

66. (МГУ, химический ф-т, 1998) Решить уравнение: $7-x = 3\sqrt{5-x}$.

$\overline{1} \text{ ' } 1$

67. (МГУ, социологич. ф-т, 1999) Решить уравнение: $\sqrt{x-1} = 6-x$.

$\frac{2}{13} \wedge - \frac{1}{21}$

68. (МГУ, химический ф-т, 1979) Решить неравенство: $\sqrt{x+3} > x+1$.

$(1;8-]$

69. (МГУ, ф-т психологии, 1997) Решить неравенство: $\sqrt{x+3} > 5-2x$.

$(\infty+; \frac{8}{68} \wedge - \frac{1}{12})$

70. (МГУ, ф-т почвоведения, 1981) Решить неравенство: $\sqrt{4x-8} \geq x-5$.

$[11;2]$

71. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) Решить уравнение: $(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23)$.

$\overline{1} \text{ ' } 1-$

72. (МГУ, мехмат, 1994) Решить уравнение: $3\sqrt{x+4} = 5-2|x+2|$.

$\frac{7}{2} - ;8- ; \frac{7}{15} -$

73. (МГУ, ВМК, 1994) Решить неравенство: $\sqrt{x-3} \leq 3-|x-6|$.

$[2;4] \cap \{8\}$

74. (МГУ, экономич. ф-т, 1993) Решить неравенство: $3\sqrt{x+2} \leq 6-|x-2|$.

$\{2\} \cap [1-;2-]$

75. (МГУ, геологич. ф-т, 2001) Решить неравенство: $|x - 6| + \sqrt{3x + 1} \leq 5$.

$$\left[\frac{2}{5}; \frac{14}{5} \right]$$

76. (МГУ, экономич. ф-т, 1983) Решить уравнение: $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$.

$$\{27\}$$

77. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) Решить уравнение: $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4 - 3x$.

$$\{1; 4\}$$

78. (МГУ, физический ф-т, 1999) Решить уравнение:

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}.$$

$$\{5\}$$

79. (МГУ, биологич. ф-т, 1993) Решить неравенство:

$$5\sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{7x - 1}{x}.$$

$$\left(\frac{8}{1} - ; \frac{6}{1} - \right)$$

80. (МГУ, химический ф-т, 2001) Решить неравенство:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x} \right)^2} \geq 0.$$

$$\left[\frac{2}{1}; 1 \right) \cap \left(1; \frac{6}{1} \right) \cap \left(\frac{6}{1}; 0 \right)$$

81. (МГУ, ФНМ, 2000) Решить неравенство:

$$\sqrt{2 - \frac{2}{x+1}} < \sqrt{2 + \frac{2}{x}} + 1.$$

$$(\infty + ; 0) \cap (2 - ; \infty -)$$

82. (МГУ, географич. ф-т, 1999) Решить уравнение:

$$\sqrt{|x^2 + 14x + 47|} - 1 = |x + 7| - 1.$$

$$\{9 - ; 9 - ; 8 - ; 6 -\}$$

83. (МГУ, экономич. ф-т, 1996) Решить систему:

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$

$(-2, -2)$

84. (МГУ, химический ф-т, 1991) Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x = 7. \end{cases}$$

$(-2, \frac{7}{2}), (1, 1)$

85. (МГУ, географич. ф-т, 1995) Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{x - \frac{3}{2}} + \sqrt[4]{10 - x} = 2.$$

$\frac{4}{23 \pm 12\sqrt{2}}$

86. (МГУ, ВМК, 1990) Решить неравенство:

$$\sqrt{9x^2 - 48x - 21} + \sqrt{9x^2 - 51x - 15} \leq |3x - 6|.$$

$\left[\frac{9}{17 + \sqrt{349}}; \frac{9}{27 + 4\sqrt{66}} \right] \cup \left[\frac{3}{8\sqrt{88}}; \frac{9}{8 - \sqrt{66}} \right]$

Задачи 87–89 решите с использованием соображений монотонности.

87. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) Решить уравнение: $\sqrt{5x-6} + x = 4$.

2

88. (МГУ, экономич. ф-т, 1995) Решить уравнение: $\sqrt{x+3} = 9 - x$.

9

89. (МГУ, химический ф-т, 1996) Решить неравенство: $\sqrt{x+5} > 7 - x$.

$(-\infty; 4)$