

Тренировочные задачи

Необходимые и достаточные условия

1. Даны высказывания A и B . В каждом случае выясните, каким условием является B для A : необходимым, но не достаточным (Н); достаточным, но не необходимым (Д); необходимым и достаточным (НД).

- а) $A :=$ *треугольник равносторонний*, $B :=$ *треугольник равнобедренный*;
- б) $A :=$ *четырёхугольник является параллелограммом*,
 $B :=$ *четырёхугольник является прямоугольником*;
- в) $A :=$ *точка равноудалена от концов отрезка*,
 $B :=$ *точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку*;
- г) $A :=$ *диагонали четырёхугольника равны и перпендикулярны*,
 $B :=$ *четырёхугольник — квадрат*;
- д) $A :=$ *вокруг четырёхугольника можно описать окружность*,
 $B :=$ *сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°* ;
- е) $A :=$ *в четырёхугольник можно вписать окружность*,
 $B :=$ *суммы противоположных сторон четырёхугольника равны друг другу*;
- ж) $A := x > 2$, $B := x > 1$;
- з) $A :=$ *число делится на 2 и на 3*, $B :=$ *число делится на 6*;
- и) $A :=$ *число делится на 4 и на 6*, $B :=$ *число делится на 24*;

Γ (и Γ Н (ε Γ Н (ж Γ Н (э Γ Н (т Γ (д Γ Н (в Γ (9 Γ Н (е

2. Сформулируйте свойства параллелограмма в виде импликаций («если ..., то ...»). Какие из этих необходимых условий являются в то же время достаточными?

3. Сформулируйте признаки параллелограмма в виде импликаций. Какие из этих достаточных условий являются в то же время необходимыми?

4. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах. Является ли это утверждение критерием?

5. Сформулируйте признак делимости на 3 (про сумму цифр числа) в виде импликации. Сформулируйте обратное утверждение; верно ли оно? Является ли признак делимости на 3 критерием? Если да, то сформулируйте его как критерий.

6. а) Придумайте достаточное условие делимости на 3, которое не является необходимым.

б) Придумайте необходимое условие делимости на 4, которое не является достаточным.

7. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он? Объясните данную ситуацию в терминах необходимых и достаточных условий.

8. Дано высказывание

$A :=$ живое существо является человеком.

Придумайте: а) необходимое условие для A , которое не является достаточным; б) достаточное условие для A , которое не является необходимым.

9. Даны высказывания:

$A :=$ число x является корнем уравнения $(x - 1)(x - 2) = 0$,

$B :=$ число x является корнем уравнения $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$.

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Какое из них является необходимым условием для другого (а какое — достаточным)? Какое из этих уравнений естественно считать следствием другого уравнения?

10. Даны высказывания:

$A :=$ число x является корнем уравнения $(x - 1)(x - 2) = 0$,

$B :=$ число x является корнем уравнения $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$.

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Логично ли назвать эти уравнения равносильными?

11. Даны высказывания:

$A :=$ число x является решением неравенства $x - 1 < 0$,

$B :=$ число x является решением неравенства $x^2 - 1 < 0$.

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Какое из них является необходимым условием для другого (а какое — достаточным)? Какое из этих неравенств естественно считать следствием другого неравенства?

12. Даны высказывания:

$A :=$ число x является решением неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$,

$B :=$ число x является решением неравенства $|x - 1| < 2$.

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Логично ли назвать эти неравенства равносильными?

13. Даны высказывания:

$A :=$ пара чисел (x, y) является решением системы $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases}$

$B :=$ пара чисел (x, y) является решением системы $\begin{cases} x^2 - 2y = 2, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Логично ли назвать эти системы равносильными?

14. Даны высказывания:

$$A := \text{пара чисел } (x, y) \text{ является решением системы } \begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ x - y = 1; \end{cases}$$
$$B := \text{пара чисел } (x, y) \text{ является решением уравнения } 3x + 2y = 5$$

(уравнение B получено сложением уравнений системы A).

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Какое из них является необходимым условием для другого (а какое — достаточным)? Естественно ли считать уравнение B следствием системы A ?

15. Найдите все значения a , при которых истинно утверждение:

а) для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 7x + 6 < 0$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $|x - 3| < a$;

б) для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a \leq 0$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 4x < 0$.

$$\boxed{[g : 0] \ni v (g : g \leq v (v$$