

# Тренировочные задачи

## Окружность

### 1. Свойства окружности.

- Если хорда не является диаметром, то диаметр, проходящий через середину этой хорды, перпендикулярен ей.
- Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
- Равные хорды удалены от центра на равные расстояния.
- Хорды, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

Докажите эти свойства.

### 2. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

09

### 3. Через точку $A$ окружности с центром $O$ проведены диаметр $AB$ и хорда $AC$ . Известно, что $\angle BAC = \alpha$ . Найдите $\angle BOC$ .

2

### 4. В окружности радиуса 1 угол между радиусами $OA$ и $OB$ равен $60^\circ$ . Найдите $AB$ .

1

### 5. Найдите угол между радиусами $OA$ и $OB$ , если расстояние от центра $O$ окружности до хорды $AB$ : а) вдвое меньше $AB$ ; б) вдвое меньше $OA$ .

а)  $90^\circ$ ; б)  $120^\circ$

### 6. Дана окружность с центром $O$ . На продолжении хорды $AB$ за точку $B$ отложен отрезок $BC$ , равный радиусу. Через точки $C$ и $O$ проведена секущая $CD$ (точка $O$ расположена между точками $C$ и $D$ ). Найдите $\angle AOD$ , если $\angle ACD = \alpha$ .

3

### 7. Даны две concentric окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между окружностями, равны.

### 8. Равные хорды окружности с центром $O$ пересекаются в точке $K$ . Докажите, что $KO$ — биссектриса угла, образованного этими хордами.

### 9. Прямая $l$ , проходящая через общую точку $A$ двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках $B$ и $C$ соответственно (точка $A$ лежит между $B$ и $C$ ). Расстояние между проекциями центров окружностей на прямую $l$ равно 1. Найдите $BC$ .

2

10. Даны две перпендикулярные хорды окружности. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

11. Даны две перпендикулярные хорды окружности. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

$$\frac{2}{b-a}$$

12. Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной вокруг него окружности.

13. Найдите геометрическое место точек  $M$ , из которых отрезок  $AB$  виден под прямым углом (то есть  $\angle AMB = 90^\circ$ ).

Окружность с диаметром  $AB$  и выделенными точками  $A, B$

14. В треугольнике  $ABC$  провели высоты  $AE$  и  $BH$ . Докажите, что точки  $A, H, E, B$  лежат на одной окружности.

15. Через точку  $A$ , лежащую на окружности, проведены диаметр  $AB$  и хорда  $AC$ . Известно, что  $AC = 4$  и  $\angle BAC = 30^\circ$ . Найдите хорду  $CD$ , перпендикулярную  $AB$ .

4

16. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности. Длины хорд равны 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

8 и 9

17. В окружности проведены диаметр  $AB$  и параллельные хорды  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что  $AC = BD$ , а  $CD$  — также диаметр.

18. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что окружность, построенная на отрезке  $MN$  как на диаметре, проходит через точку  $A$ .

19. На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите  $CK$ , если  $AC = 2$  и  $\angle A = 30^\circ$ .

1

20. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ ,  $AC$  и  $AD$  — диаметры окружностей. Докажите, что точки  $B, C, D$  лежат на одной прямой.

21. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон.

22. а) Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

б) Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

23. Докажите, что касательные к окружности, проведённые через концы диаметра, параллельны.

24. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности. Касательные к окружности, проведённые через эти точки, пересекаются в точке  $C$ , причём  $AB = AC$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

09 ' 09 ' 09

25. Расстояние от точки  $M$  до центра  $O$  окружности равно диаметру. Через точку  $M$  проведены две прямые, касающиеся окружности в точках  $A$  и  $B$ . Найдите углы треугольника  $AOB$ .

120 ' 30 ' 30

26. Даны две концентрические окружности. Хорда большей окружности касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

27. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на биссектрисе угла.

28. Окружность радиуса 3 касается сторон угла, равного  $120^\circ$ , в точках  $A$  и  $B$ . Найдите  $AB$ .

ε

29. Две прямые касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$ . Найдите угол между этими прямыми, если  $\angle ABO = 40^\circ$ .

08

30. Две прямые, пересекающиеся в точке  $C$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ , причём  $\angle ACB = 120^\circ$ . Докажите, что  $AC + BC = OC$ .

31. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключённый между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

32. Точка  $M$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольники  $ABM$  и  $ACM$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что  $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$ .

33. Найдите углы треугольника, если центры его вписанной и описанной окружностей совпадают.

09 ' 09 ' 09

34. Окружности радиусов  $R$  и  $r$ , центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает эту прямую под углом  $30^\circ$ . Найдите расстояние между центрами окружностей.

$2(R+r)$

35. В прямой угол вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Через точку меньшей дуги  $AB$  проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

17

36. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной  $a$ , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

v

37. К окружности, вписанной в квадрат со стороной  $a$ , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

□ $\nu$

38. Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

39. Точка  $A$  лежит вне окружности  $S$  с центром  $O$ . Окружность с диаметром  $OA$  пересекается с окружностью  $S$  в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $AC$  касаются окружности  $S$ .

40. Из точки, лежащей вне двух concentрических окружностей, проведены четыре касательные к этим окружностям. Докажите, что исходная точка и четыре точки касания лежат на одной окружности.

41. Точка  $M$  расположена вне окружности с центром  $O$ . Через точку  $M$  проведены две прямые, касающиеся окружности в точках  $A$  и  $B$ . Отрезок  $OM$  делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок  $AM$  делится прямой  $AB$ ?

□(O именьол ло ввалильс) ε : 1

42. Точка  $D$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ACD$ , касается отрезка  $CD$  в его середине. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .

□09 ' 00ε

43. Расстояние между равными параллельными хордами  $AB$  и  $CD$  равно радиусу окружности. Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $BD$ .

□09

44. В окружности проведены равные хорды  $AB$  и  $CD$ . Их продолжения за точки  $B$  и  $C$  соответственно пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что треугольники  $ADE$  и  $BCE$  равнобедренные.

45. Продолжения хорд  $AB$  и  $CD$  окружности с диаметром  $AD$  пересекаются под углом  $25^\circ$ . Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $BD$ .

□25°

46. Окружность, построенная на биссектрисе  $AD$  треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $E$  и  $F$  (отличных от  $A$ ). Докажите, что  $AE = AF$ .

47. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся (помимо  $A$ ) в точке  $D$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежат на одной прямой.

48. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите острые углы треугольника,

□45°, 45°

49. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении  $1 : 3$ . Найдите острые углы треугольника,

09 ' 08

50. Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$  (отличной от  $A$ ), а окружность с центром  $B$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $KM = KN$ .

51. Биссектрисы углов треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $K$ , а биссектрисы внешних углов  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $L$ . Докажите, что точки  $B, C, K, L$  лежат на одной окружности.

52. Точки  $A, B, C, D$  последовательно расположены на окружности так, что центр  $O$  окружности лежит внутри четырёхугольника  $ABCD$ . Точки  $K, L, M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB, BC, CD$  и  $DE$  соответственно. Докажите, что  $\angle KON + \angle LOM = 180^\circ$ .

53. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.

54. Точки  $D, E$  и  $F$  — середины сторон  $AB, BC$  и  $AC$  (соответственно) равностороннего треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямая  $DE$  касается окружности, проходящей через точки  $C, E, F$ .

55. Окружность вписана в треугольник со сторонами 5, 7 и 10. Найдите отрезки, на которые наибольшая сторона делится точкой касания.

9 и 7

56. Прямая касается окружности с центром  $O$  в точке  $A$ . Точка  $C$  на этой прямой и точка  $D$  на окружности расположены по разные стороны от прямой  $OA$ . Найдите угол  $CAD$ , если  $\angle AOD = 110^\circ$ .

125

57. Прямая касается окружности с центром  $O$  в точке  $A$ . Точка  $C$  на этой прямой и точка  $D$  на окружности расположены по одну сторону от прямой  $OA$ . Найдите угол  $CAD$ , если  $\angle AOD = 110^\circ$ .

099

58. (*Свойство описанного четырёхугольника*) Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Докажите.

59. Окружность высекает на сторонах четырёхугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

60. Окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $K$  и продолжений двух других сторон. Докажите, что периметры треугольников  $ABK$  и  $ACK$  равны.

61. В равнобедренный треугольник с основанием  $a$  вписана окружность. К окружности проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника три маленьких треугольника. Найдите боковую сторону данного треугольника, если сумма периметров маленьких треугольников равна  $b$ .

$\frac{7}{b-a}$

62. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Найдите угол  $KLM$ , если  $\angle A = 70^\circ$ .

55

63. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Найдите угол  $BOC$ , если  $\angle KLM = \alpha$ .

$\alpha - 108^\circ$

64. Дан прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен  $(a + b - c)/2$ .

65. Из вершины  $C$  прямого угла треугольника  $ABC$  проведена высота  $CH$ . Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $ACH$  и  $BCH$ , равна  $CH$ .

66. Сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  равна  $a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Вписанная окружность касается стороны  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что  $AK = p - a$ .

67.  $CD$  — медиана треугольника  $ABC$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , касаются отрезка  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите  $MN$ , если  $AC - BC = 2$ .

1

68. На основании  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  так, что  $BD - AD = 10$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , касаются отрезка  $CD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите  $EF$ .

9

69. Окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$ , а продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  — в точках  $N$  и  $P$  соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а стороны  $AB$  — в точке  $L$ . Докажите, что:

- а) отрезок  $AN$  равен полупериметру треугольника  $ABC$ ;
- б)  $BK = CM$ ;
- в)  $NL = BC$ .

70. В треугольник со сторонами 3, 5 и 6 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

8

71. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные двух окружностей пересекаются на прямой, проходящей через центры окружностей.

**72.** Докажите, что центры двух касающихся окружностей и точка касания лежат на одной прямой.

**73.** Окружность с центром  $O$  касается внутренним образом большей окружности в точке  $A$ . Из точки  $B$  большей окружности, диаметрально противоположной точке  $A$ , проведена хорда  $BC$ , касающаяся меньшей окружности в точке  $K$ . Докажите, что  $OK \parallel AC$ .

**74.** Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $K$ . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках  $A$  и  $B$  и пересекает их общую касательную, проходящую через  $K$ , в точке  $M$ . Докажите, что  $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$ .

**75.** В угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен  $r$ . Найдите радиус большей окружности.

⌘

**76.** Две окружности касаются внутренним образом. Два радиуса большей окружности, угол между которыми  $60^\circ$ , касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

⌘

**77.** Две окружности касаются в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает эти окружности вторично в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Докажите, что касательные, проведённые к этим окружностям в точках  $B$  и  $C$ , параллельны.

**78.** (*Признак описанного четырёхугольника*) Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Докажите.