

Вписанные и описанные окружности

ЗАДАЧА 1. (*Турнир городов, 2012, 8–9*) На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли такие точки P и Q , что $AQ = AC$, $BP = BC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PQC , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

ЗАДАЧА 2. (*Турнир городов, 2011, 8–9*) Равнобедренная трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит её площадь пополам.

ЗАДАЧА 3. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2014, 8–9*) В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC , причём $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH .

ЗАДАЧА 4. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N — точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

ЗАДАЧА 5. (*Турнир городов, 2013, 8–9*) Дан треугольник ABC . Пусть I — центр вписанной в него окружности, и пусть X , Y , Z — центры окружностей, вписанных в треугольники AIB , BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ , совпадает с I . Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний?

□

ЗАДАЧА 6. (*ММО, 2015, 9*) Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC . Две равные окружности касаются сторон AB , BC и AC , BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K . Оказалось, что K лежит на прямой OI . Найдите $\angle BAC$.

◻06