Вписанная сфера

Задача 1. (*Всеросс., 2013, финал, 11*) Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

Задача 2. (*Всеросс., 2003, округ, 11*) Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера σ касается грани ABC в точке T. Сфера σ' касается грани ABC в точке T' и продолжений граней ABD, BCD, CAD. Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

Задача 3. (*ММО, 1984, 10*) Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

Задача 4. (*Всеросс., 1994, финал, 11*) Высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ — правильный.

Задача 5. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный.

Задача 6. (*Всеросс., 1999, округ, 11*) Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что больших граней не больше 6.

Задача 7. (*Всеросс., 1998, финал, 11*) В тетраэдр $ABCD$, длины всех рёбер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

Задача 8. (*Турнир городов, 2004, 10–11*) У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней (с общим ребром AB) равна сумме площадей оставшихся граней (с общим ребром CD). Докажите, что середины рёбер BC, AD, AC и BD лежат в одной плоскости, причём эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$.

Задача 9. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2005, 10–11*) В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей её противоположных боковых граней равны.

Задача 10. (*ММО, 1989, 10*) На рёбрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на рёбрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырёх проведённых плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвёртая плоскость также его касается.

Задача 11. (*Всеросс. по геометрии, 2005, 11*) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D'. Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

Задача 12. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Дана описанная четырёхугольная пирамида $ABCDS$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q, причём точки A и B лежат на отрезках PD и PC. Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L. Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на отрезке BD.

Задача 13. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на рёбра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.

Задача 14. (*ММО, 2014, 11*) Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Задача 15. (*ММО, 1970, 10*) Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Доказать, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.