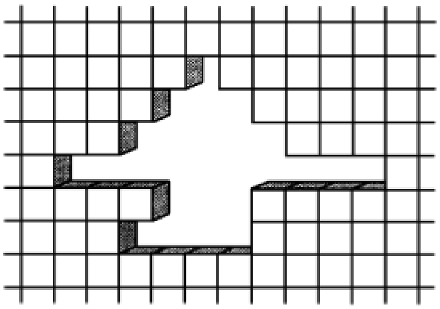
Наглядная геометрия в пространстве

1. (*Всеросс., 2015, I этап, 5.2*) Сколько кирпичей не хватает в стене, изображённой на рисунке?



26

2. (*Московская устная олимпиада, 2009, 6.2*) Куб, стоящий на плоскости, несколько раз перекатили через его рёбра, после чего он вернулся на прежнее место. Обязательно ли он стоит на той же грани?

3. (*Математический праздник, 1993, 6.3*) Как из семи «уголков», каждый из которых склеен из трёх кубиков $1\times1\times1$, и шести отдельных кубиков $1\times1\times1$ составить большой куб $3\times3\times3$?

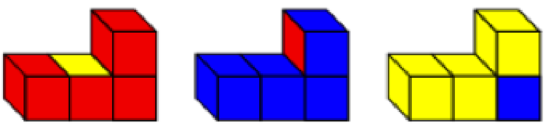
Можно ли это сделать так, чтобы все отдельные кубики оказались в серединах граней большого куба?

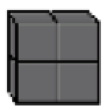
4. (*Математический праздник, 2017, 6–7.3*) Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные — красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков ровно треть — красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи.

5. (*Математический праздник, 1999, 6.4, 7.3*) Из Москвы вылетел вертолёт, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее её или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

Восточнее Москвы на той же широте

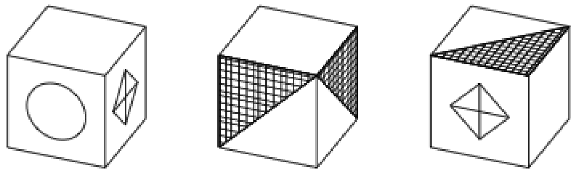
6. (*Московская устная олимпиада, 2017, 7.3*) У Саши было четыре раскрашенных кубика. Расставляя их по-разному, он по очереди сфотографировал три фигуры (рис. слева). Затем Саша сложил из них параллелепипед размером $2\times2\times1$ и сделал его чёрно-белое фото (рис. справа). Все видимые на этом фото грани кубиков одного и того же цвета. Какого?



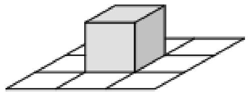


7. (*Математический праздник, 1994, 6.4*) Составьте куб $3\times3\times3$ из красных, жёлтых и зелёных кубиков $1\times1\times1$ так, чтобы в любом бруске $3\times1\times1$ были кубики всех трёх цветов.

8. (*Математический праздник, 1997, 6.5*) Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трёх различных положениях он выглядел, как показано на рисунке. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развёртку.)

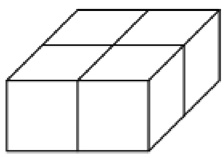


9. (*Московская устная олимпиада, 2006, 6.5*) Дан кубик с ребром 1. Одну из его граней склеили с центральной клеткой квадрата 3×3 (см. рисунок). Объясните, как завернуть кубик в этот лист бумаги, если разрешается (только по линиям сетки) делать надрезы и сгибать лист.

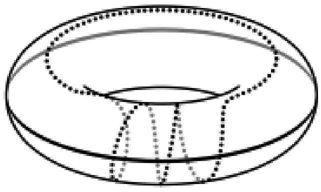


10. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.8*) Есть 16 кубиков, каждая грань которых покрашена в белый, чёрный или красный цвет (различные кубики могут быть покрашены поразному). Посмотрев на их раскраску, барон Мюнхгаузен сказал, что может так поставить их на стол, что будет виден только белый цвет, может поставить так, что будет виден только чёрный, а может и так, что будет виден только красный. Могут ли его слова быть правдой?

11. (*Московская устная олимпиада, 2014, 6.9*) Четыре одинаковых кубика расположили на столе так, как показано на рисунке. Одна из граней каждого кубика покрашена в чёрный цвет. За один шаг разрешается повернуть одинаковым образом оба кубика из одного ряда (вертикального или горизонтального). Докажите, что, независимо от начального расположения чёрных граней, за несколько таких шагов можно расположить кубики чёрными гранями вверх.



12. (*Математический праздник, 2016, 7.1*) По поверхности планеты, имеющей форму бублика, проползли, оставляя за собой следы, две улитки: одна по внешнему экватору, а другая по винтовой линии (см. рисунок). На сколько частей разделили поверхность планеты следы улиток? (Достаточно написать ответ.)

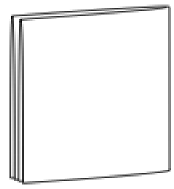


3

13. (*Всеросс., 2014, II этап, 7.2*) Высота комнаты — 3 метра. При её ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол. Может ли площадь пола этой комнаты быть больше, чем 10 квадратных метров? Ответ объясните.

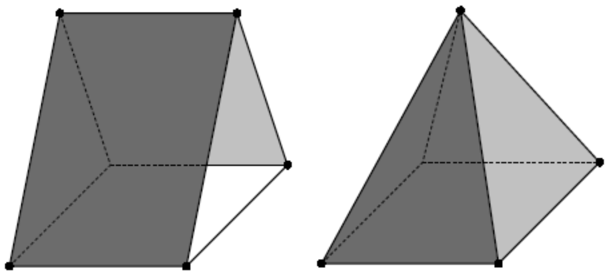
Не может

14. (*Математический праздник, 2003, 7.2*) Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз (см. рисунок). Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться а) на 2 части? б) на 3 части? в) на 4 части? г) на 5 частей? Если да — нарисуйте такой разрез, если нет — напишите слово «нельзя».



Во всех случаях можно

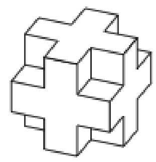
15. (*Московская устная олимпиада, 2008, 7.5*) Иван Иванович построил сруб, квадратный в основании, и собирается покрывать его крышей. Он выбирает между двумя крышами одинаковой высоты: двускатной и четырёхскатной (см. рисунки). На какую из этих крыш понадобится больше жести?



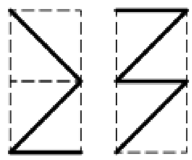
16. (*Московская устная олимпиада, 2003, 7.5*) Можно ли оклеить поверхность куба прямоугольниками так, чтобы любой прямоугольник граничил (по отрезку) ровно с пятью другими?

17. (*Математический праздник, 1998, 7.6*) Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб $2 \times 2 \times 2$.

18. (*Математический праздник, 1993, 7.6*) Из кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный шарнир и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?



19. (*Математический праздник, 1997, 7.6*) Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левом рисунке. А если справа — то как на правом рисунке. Нарисуйте вид сверху.



20. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.7*) В каждой вершине куба сидело по мухе. Потом все мухи разом взлетели и сели по одной в каждую вершину в каком-то другом порядке. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положении сидели в вершинах равных треугольников.