

Уравнения и неравенства на олимпиадах высокого уровня

Данный листок посвящён задачам, которые внешне кажутся не столько олимпиадными, сколько экзаменационными. Однако они регулярно появляются на региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике и на Московской математической олимпиаде.

Разумеется, название «уравнения и неравенства» несколько условно и не охватывает целиком всё содержание листка. Сюда же относятся задачи, связанные с тождественными преобразованиями и оценками тригонометрических и логарифмических выражений, исследованием функций и их графиков и т. п.

Московская математическая олимпиада

После введения в 2011 году формата «первый день — второй день» (для 11 класса) такие задачи стали появляться на ММО каждый год.

1. (ММО, 2017, 11.2) Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

2. (ММО, 2017, 11.3) Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.

а) Сравните x_0 и y_0 .

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.

3. (ММО, 2016, 11) Существует ли такое значение x , что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1?$$

4. (ММО, 2015, 11) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

5. (ММО, 2015, 11) Какое наибольшее количество множителей вида $\sin \frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \sin \frac{3\pi}{x} \dots \sin \frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

6. (ММО, 2014, 11) Найдите все значения a , для которых найдутся такие x , y и z , что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

7. (ММО, 2014, 11) Найдите все такие a и b , что

$$|a| + |b| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

и при всех x выполнено неравенство

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leq 1.$$

8. (ММО, 2013, 11) Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

9. (ММО, 2013, 11) Сравните числа

$$\left(1 + \frac{2}{3^3}\right) \left(1 + \frac{2}{5^3}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

10. (ММО, 2012, 11) Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций

$$y = 2a + \frac{1}{x-b} \quad \text{и} \quad y = 2c + \frac{1}{x-d}$$

имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций

$$y = 2b + \frac{1}{x-a} \quad \text{и} \quad y = 2d + \frac{1}{x-c}$$

также имеют ровно одну общую точку.

11. (ММО, 2011, 11) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

12. (ММО, 2010, 10) Можно ли, применяя к числу 2 функции $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}, \operatorname{arcsin}, \operatorname{arccos}, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$ в любом количестве и в любом порядке, получить число 2010?

13. (ММО, 2010, 11) Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{a + \frac{2010}{b + \frac{1}{c}}},$$

где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

14. (ММО, 2007, 11) Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

15. (ММО, 2006, 10) Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

16. (ММО, 2006, 11) Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, \dots, a_5 , все члены которой принадлежат отрезку $[0; \frac{3\pi}{2}]$, если числа $\cos a_1, \cos a_2, \cos a_3$, а также числа $\sin a_3, \sin a_4$ и $\sin a_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

17. (ММО, 2005, 10) Существует ли плоский четырёхугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

18. (ММО, 2005, 11) Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

19. (ММО, 2004, 11) Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin(k_0x) + A_1 \sin(k_1x) + A_2 \sin(k_2x) = 0$$

где A_1, A_2 — вещественные числа.

20. (ММО, 2003, 10) Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x), P_2(x), \dots$. Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x) = f_2(f_1(f_2(x)))$)?

21. (ММО, 1997, 11) Вычислите

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)) dx.$$

22. (ММО, 1995, 10) Известно число $\sin \alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin \frac{\alpha}{2}$; б) $\sin \frac{\alpha}{3}$?

23. (ММО, 1993, 11) Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

Нужно разобратить так же остальные случаи при $p, d \neq b$ и $0 \neq b, d$ или $\frac{d-b}{bd}$
--

24. (ММО, 1992, 10) Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

25. (ММО, 1990, 11) Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

26. (ММО, 1988, 10) Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y = 2^x$?

27. (ММО, 1987, 10) а) Доказать, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y , что

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1.$$

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырёх чисел?

28. (ММО, 1986, 10) Решите уравнение $x^{x^4} = 4$ ($x > 0$).

29. (ММО, 1984, 10) Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство

$$\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}.$$

30. (ММО, 1983, 10) На доске после занятия осталась запись: «Вычислить»

$$t(0) - t\left(\frac{\pi}{5}\right) + t\left(\frac{2\pi}{5}\right) - t\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \dots + t\left(\frac{8\pi}{5}\right) - t\left(\frac{9\pi}{5}\right),$$

где $t(x) = \cos 5x + * \cos 4x + * \cos 3x + * \cos 2x + * \cos x + *$. Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи *). Не ошибается ли он?

31. (ММО, 1981, 10) Доказать, что последовательность $x_n = \sin(n^2)$ не стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

32. (ММО, 1963, 10) Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

33. (ММО, 1954, 10) Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

34. (ММО, 1952, 10) Найдите соотношение между $\arcsin \cos \arcsin x$ и $\arccos \sin \arccos x$.

35. (ММО, 1948, 9–10) Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

36. (ММО, 1939) Доказать, что

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

Всероссийская олимпиада школьников по математике

37. (Всеросс., 2012, РЭ, 10.5) Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

38. (Всеросс., 2004, ФОЭ, 10.1) Сумма положительных чисел a, b, c равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c.$$

39. (Всеросс., 2003, ФОЭ, 10.1) Найдите все углы α , для которых набор чисел $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha$.

$$\frac{\tau}{ux} + \frac{s}{y} = v$$

40. (Всеросс., 1998, ФОЭ, 10.1) Пусть

$$f(x) = x^2 + ax + b \cos x.$$

Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

41. (Всеросс., 1995, финал, 10.1) Решите уравнение $\cos(\cos(\cos(\cos x))) = \sin(\sin(\sin(\sin x)))$.

42. (Всеросс., 2009, финал, 10.3) Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке $\left[0, \frac{2009\pi}{2}\right]$?

43. (Всеросс., 2011, РЭ, 11.1) Существует ли такое вещественное α , что число $\cos \alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$ рациональны?

44. (Всеросс., 2010, РЭ, 11.5) Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin \alpha > \cos \beta, \sin \beta > \cos \gamma, \sin \gamma > \cos \alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

45. (Всеросс., 2009, РЭ, 11.3) Докажите, что $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

46. (Всеросс., 2012, РЭ, 11.7) Даны различные натуральные числа a, b . На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax, y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c , отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

47. (Всеросс., 2005, ФОЭ, 11.1) Найдите все пары чисел $x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.

48. (Всеросс., 1994, ФОЭ, 11.1) Докажите, что при всех $x, 0 < x < \frac{\pi}{3}$, справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

49. (Всеросс., 2006, ФОЭ, 11.5) Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдётся такое натуральное n , что $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

50. (Всеросс., 2001, ФОЭ, 11.5) Дана последовательность $\{x_k\}$ такая, что

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = n \sin x_n + 1.$$

Докажите, что последовательность непериодична.

51. (Всеросс., 1995, ФОЭ, 11.5) Для углов α, β, γ справедливо неравенство

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2.$$

Докажите, что

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}.$$

52. (Всеросс., 1997, ФОЭ, 11.6) Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

53. (Всеросс., 2004, ФОЭ, 11.7) При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ , являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство

$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0?$$

54. (Всеросс., 2017, финал, 11.1) Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

55. (Всеросс., 2014, финал, 11.1) Существует ли такое положительное число a , что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

56. (Всеросс., 2007, финал, 11.1) Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один \cos на \sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}$.

57. (Всеросс., 2006, финал, 11.1) Докажите, что $\sin \sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

58. (Всеросс., 2005, финал, 11.1) Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x - a_1| + \dots + |x - a_{50}| = |x - b_1| + \dots + |x - b_{50}|,$$

где $a_1, \dots, a_{50}, b_1, \dots, b_{50}$ — различные числа?

59. (Всеросс., 2003, финал, 11.1) Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ — такие положительные числа, что при всех x

$$\sin \alpha x + \sin \beta x = \sin \gamma x + \sin \tau x.$$

Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \tau$.

60. (Всеросс., 2009, финал, 11.5) Пусть $1 < a \leq b \leq c$. Докажите, что

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

61. (Всеросс., 2000, финал, 11.5) Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1,$$

где n — любое натуральное число.

62. (Всеросс., 2002, финал, 11.3) Докажите, что для всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ при $n > m$, где n, m — натуральные, справедливо неравенство

$$2 |\sin^n x - \cos^n x| \leq 3 |\sin^m x - \cos^m x|.$$