

УГЛЫ

Угол AOB — это часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами OA и OB с общим началом O (рис. 1). Лучи OA и OB называются *сторонами* этого угла, общее начало O — *вершиной* угла.

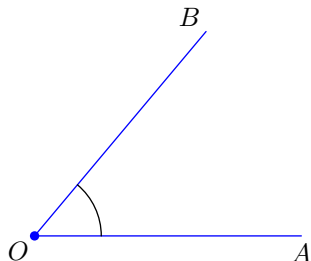


Рис. 1. Угол AOB

Угол обозначается следующим образом: $\angle AOB$. Для дополнительного обозначения угла на рисунке может использоваться дуга, идущая внутри угла от одной стороне к другой (как это показано на рис. 1).

Если точки A , O , B лежат на одной прямой, то угол AOB называется *развёрнутым* (рис. 2).

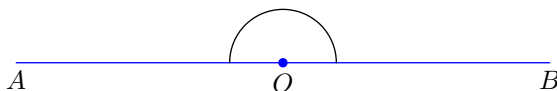


Рис. 2. Развёрнутый угол

Перейдём к вопросу об измерении углов.

Градусная мера угла

Углы, как вы знаете, измеряются в градусах. Развёрнутый угол содержит 180° *по определению*. Таким образом, угол в 1° — это $1/180$ часть развёрнутого угла.

Проведём внутри угла AOB луч OC . Этот луч разбивает угол AOB на два угла AOC и BOC . Градусные меры α и β двух полученных углов в сумме дают градусную меру исходного угла (рис. 3).

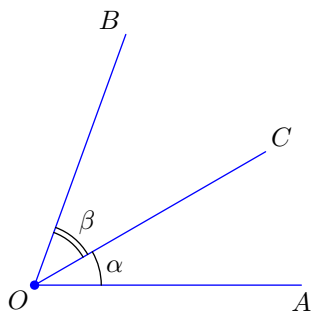


Рис. 3. $\angle AOB = \alpha + \beta$

Как видите, символами $\angle AOB$, α , β и т. д. могут обозначаться как сами углы, так и их градусные меры.

Угол, равный 90° , называется *прямым*. Угол α называется *острым*, если $0 < \alpha < 90^\circ$. Угол α называется *тупым*, если $90 < \alpha < 180^\circ$.

Углы называются *равными*, если их градусные меры равны. Равные углы можно наложить друг на друга так, что они полностью совпадут.

Смежные и вертикальные углы

Проведём внутри развёрнутого угла AOB луч OC . Получим *смежные* углы AOC и BOC , изображённые на рис. 4.

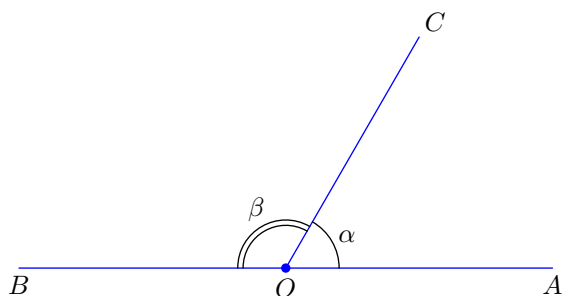


Рис. 4. Смежные углы: $\alpha + \beta = 180^\circ$

Смежные углы в сумме дают 180° — очевидное свойство смежных углов. Если один из смежных углов острый, то другой — тупой (и наоборот). Прямой угол равен своему смежному.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O . При этом образуются две пары *вертикальных* углов: AOC и BOD , AOD и BOC (рис. 5).

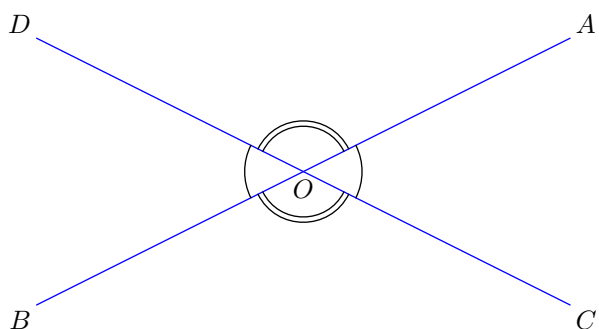


Рис. 5. Вертикальные углы

Вертикальные углы равны — простое и важное свойство вертикальных углов. В самом деле, по свойству смежных углов имеем:

$$\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ.$$

Точно так же:

$$\angle BOD + \angle AOD = 180^\circ.$$

Сопоставляя два последних равенства, видим, что

$$\angle AOC = \angle BOD.$$

Аналогично выводится равенство

$$\angle AOD = \angle BOC.$$

Равенство вертикальных углов также изображено на рис. 5: равные углы обозначены одинаково (одной дугой или двумя дугами).

Угол между прямыми

При пересечении прямых a и b получаются две пары вертикальных углов (рис. 6).

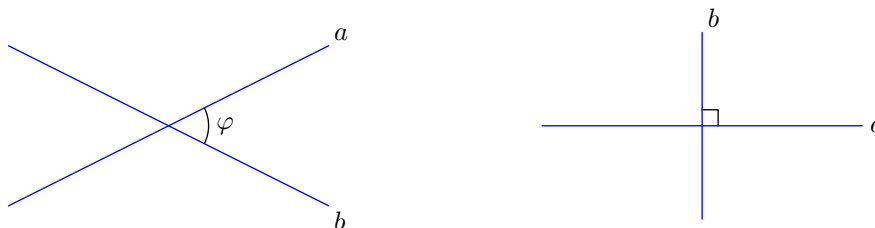


Рис. 6. Угол между прямыми

Если два угла этой пары являются острыми (а два остальных угла — тупыми), то углом между прямыми a и b называется *острый* угол φ (рис. 6 слева).

Если все четыре угла являются прямыми (рис. 6 справа), то прямые a и b называются *перпендикулярными*. Угол между этими прямыми равен 90° .

Биссектриса угла

Проведём внутри угла AOB луч OC , который делит угол AOB на два равных угла (рис. 7).

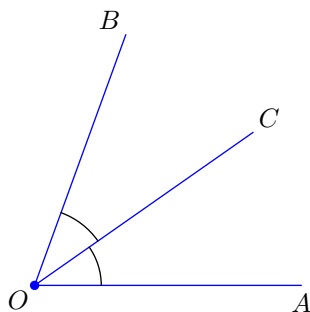


Рис. 7. Биссектриса угла

Луч OC называется *биссектрисой* угла AOB . Если сложить угол вдоль его биссектрисы, то стороны угла совпадут.

Задачи

1. Один из двух смежных углов на 50° больше другого. Найдите эти углы.

130° и 110°

2. Один из двух смежных углов в пять раз больше другого. Найдите эти углы.

30° и 150°

3. При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Один из этих углов равен 23° . Чему равны остальные три угла?

23°, 157°, 157°

4. При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Один из этих углов равен 93° . Чему равен угол между прямыми?

18°

5. Три прямые, пересекаясь в одной точке, делят плоскость на шесть углов. Два из этих углов равны 38° и 44° . Чему равны остальные углы?

$38^\circ, 44^\circ, 98^\circ, 98^\circ$

6. а) Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов. б) Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

а) 90° ; б) 180°

7. Через вершину угла α проведена прямая, перпендикулярная его биссектрисе. Какие углы образует эта прямая со сторонами угла?

$90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

8. Угол AOB равен 40° , а угол BOC равен 80° . Чему равен угол между биссектрисами этих углов?

60°

9. Прямой угол разделён двумя лучами на три угла. Один из этих углов на 20° больше другого и на 20° меньше третьего. Найдите эти углы.

$10^\circ, 30^\circ, 50^\circ$

10. Луч света идёт из точки A , отражается от плоского зеркала KL в точке B и попадает в точку C (угол падения равен углу отражения). Докажите, что биссектриса угла ABC перпендикулярна прямой KL .

11. Точка M лежит внутри угла AOB , OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен модулю полуразности углов AOM и BOM .

12. Точка M лежит вне угла AOB , OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полусумме углов AOM и BOM .

13. Из точки O на плоскости выходят три луча OA , OB и OC . Известно, что $\angle AOB = 100^\circ$, $\angle BOC = 70^\circ$. Найдите угол AOC .

30°

14. На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? часовая стрелка?

$6^\circ; 0,5^\circ$

15. На часах 3:05. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками?

$67,5^\circ$

16. Из точки O на плоскости выходят четыре луча OA , OB , OC , OD (последовательно по часовой стрелке). Известно, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.