

## Тригонометрические уравнения с параметрами

1. («Ломоносов», 2014) Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} - \alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x) = 2 \sin 2x - 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} > \alpha > u\pi$$

2. («Ломоносов», 2006) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x + 2a \cos x + |2a + 1| - 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

$$(\infty+; \pi] \cap \left\{\frac{\pi}{4}\right\} \cap [0; \frac{\pi}{4}] \cap \{\pi-\}$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения

$$3 \operatorname{tg} a \cdot \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \cdot \cos x + 3 \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0$$

меньше либо равно  $\pi/2$ .

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \mp$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Определите, при каких значениях  $n$  и  $k$  уравнение

$$\sin x + \sin y = \frac{\pi k}{2017}$$

является следствием уравнения

$$x + y = \frac{\pi n}{48}.$$

$$\mathbb{Z} \ni k, k \neq 0 = n$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Для каждого значения  $a$  решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2 \sin 3x \sin 7x - \cos^2 7x - \cos^2 \pi a = 0.$$

$$\text{Если } a \in \mathbb{Z}, \text{ то } x \in \mathbb{Z}; \text{ если } a \notin \mathbb{Z}, \text{ то } x \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = x$$

6. («Ломоносов», 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:

- 1) «Уравнение  $\cos(\cos x) + \sin(\sin x) = a$  имеет ровно два корня на отрезке  $[0; \pi]$ »;
- 2) «Уравнение  $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$  имеет корни».

$$(\mathbb{I} \cup \mathbb{I} + \mathbb{I}; \frac{\pi}{2}) \cap (\mathbb{I} \cup \mathbb{I}; \frac{\pi}{4} - ]$$

7. (ММО, 2014, 11) Найдите все значения  $a$ , для которых найдутся такие  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что числа  $\cos x$ ,  $\cos y$  и  $\cos z$  попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа  $\cos(x + a)$ ,  $\cos(y + a)$  и  $\cos(z + a)$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

$$\mathbb{Z} \ni u^4 + v^4 = w^4$$