Параметры и тригонометрия

Задача. (*«Физтех», 2011*) Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α такое, что уравнение

$$x^2 + (\cos\alpha - 4\sin\alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

Решение. Обозначим $a = \cos\alpha - 4\sin\alpha$; имеем:

$$a = \sqrt{17}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\right) = \sqrt{17}\cos(\alpha+\varphi),$$

где

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Когда α пробегает множество $\mathbb{R}$, параметр a пробегает все значения из отрезка $\left[-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right]$. Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения b, для каждого из которых существует число $a \in \left[-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right]$ такое, что уравнение

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

имеет действительный корень.

Зафиксируем b и предположим, что a пробегает отрезок $\left[-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right]$; тогда дискриминант $D = a^2 - 4b$ пробегает отрезок $I = [-4b; 17 - 4b]$. Если $b > \frac{17}{4}$, то $17 - 4b < 0$; отрезок I в этом случае содержит только отрицательные числа, и уравнение (1) не имеет корней. Если же $b \leqslant \frac{17}{4}$, то, например, при $a = \sqrt{17}$ дискриминант неотрицателен: $D = 17 - 4b \geqslant 0$, и потому уравнение (1) имеет действительный корень.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{17}{4}\right]$.

Задачи

1. (*«Физтех», 2011*) Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α такое, что уравнение

$$x^2 + (2\sin\alpha - \cos\alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

$\boxed{\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)}$

2. (*МГУ, мехмат, 1996*) Найти все a, при которых уравнение

$$2\cos^2 2^{2x-x^2} = a + \sqrt{3}\sin 2^{2x-x^2+1}$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{a \in [-1; 2]}$

3. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите все значения α, при каждом из которых нули функций

$$f(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}-\alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x)=2\sin 2x-4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

$\pi n<\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

4. (*«Ломоносов», 2006*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x+2a\cos x+|2a+1|-2=0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

$\{-2\}\cup\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[2;+\infty)$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Найдите все значения a, при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения

$$3\operatorname{tg} a\cdot\cos 2x+3\sqrt{2}\cos 3a\cdot\cos x+3\operatorname{tg} a-\operatorname{ctg} a=0$$

меньше либо равно $\pi/2$.

$\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Определите, при каких значениях n и k уравнение

$$\sin x+\sin y=\frac{\pi k}{2017}$$

является следствием уравнения

$$x+y=\frac{\pi n}{48}\,.$$

$k=0;\ n=96t,\ t\in\mathbb{Z}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Для каждого значения a решите уравнение

$$4-\sin^2 x+\cos 4x+\cos 2x+2\sin 3x\sin 7x-\cos^2 7x-\cos^2\pi a=0.$$

Если $a\in\mathbb{Z}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\notin\mathbb{Z}$, то решений нет

8. (*«Ломоносов», 2017*) Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:
1) «Уравнение $\cos(\cos x)+\sin(\sin x)=a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0;\pi]$»;
2) «Уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x=a$ имеет корни».

$\left[-\frac{1}{2};\cos 1\right)\cup\left(\frac{3}{2};1+\sin 1\right)$

9. (*ММО, 2014, 11*) Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

$\boxed{a = \pi n, n \in \mathbb{Z}}$

10. (*МГУ, мехмат, 2003*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(\arccos 5x) = a + \arcsin\big(\sin(7x-3)\big)$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\left[\pi - \frac{22}{5}; \pi - \frac{8}{5}\right) \cup \left\{\pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}\right\}}$

11. (*МГУ, мехмат, 2002*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2 + (1-2a)x + a - 4 = 0$$

больше $\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{(2; +\infty)}$

12. (*МГУ, мехмат, 1998*) Найти все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y = -\frac{2}{3} - \arcsin x \quad \text{и} \quad y = -\frac{2}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\, kx$$

имеет положительную ординату.

$\boxed{\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{3}}; 1\right]}$

13. (*МГУ, экономич. ф-т, 2006*) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$4a^2 \cdot \sqrt{2 - \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{3} - 2x\right)} + \frac{12a}{\pi}\arccos\left(2x - \sqrt{3}\right) - 8a^2 - 3a \leqslant 1$$

выполняется для любых $x \in \left[\frac{2\sqrt{3}-1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

$\boxed{\left[-1; \frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty)}$

14. (*МГУ, ВМК, 1998*) Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leqslant 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x \cdot (\pi + 2\arcsin x)} \geqslant y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\infty; -\sqrt{13}\right] \cup \left[\frac{11}{3}; +\infty\right)}$

15. (*МГУ, ф-т психологии, 1998*) Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) - b\cdot 2^{\sin(\pi b x)} - \left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) + b\cdot 2^{\sin(\pi b x)}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

$\boxed{a=-1,\ b=3,4,5,\ldots;\ a=-2,\ b=4,5,6,\ldots}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Для каких из перечисленных значений параметра a ($a=-1$, 2010, $\log_2 3$) найдётся такое значение b, что уравнение

$$\cos x + \cos ax = b$$

имеет единственное решение?

$\boxed{\log_2 3}$

17. (*«Ломоносов», 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13\cdot 5^x + a < 0, \\ 12\sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{a < 13\sqrt{5} - 5}$