

## Тригонометрические уравнения с модулем

Этот листок посвящён тригонометрическим уравнениям, в которых тригонометрические функции от неизвестной величины содержатся под знаком модуля.

Как правило, модуль приходится снимать по обычным правилам, рассматривая случаи разных знаков тригонометрического выражения под модулем.

ЗАДАЧА. («Ломоносов», 2013) Решить уравнение

$$\sqrt{6} \cos x - \sqrt{2} |\sin x| = 2.$$

РЕШЕНИЕ. Разделив обе части уравнения на  $2\sqrt{2}$ , получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{6} - |\sin x| \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если

$$\sin x \geq 0, \tag{1}$$

то уравнение принимает вид

$$\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

с решениями  $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , которые нужно записать в виде двух отдельных серий:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Условию (1) удовлетворяет только серия  $x_1$ .

Если же

$$\sin x < 0, \tag{2}$$

то уравнение примет вид

$$\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

с решениями

$$x_3 = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \quad x_4 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Условию (2) удовлетворяет только серия  $x_4$ .

ОТВЕТ:  $x = \pm \frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Неискушённые школьники часто начинают *решать* неравенства (1) и (2). Как видите, делать этого не надо. В данном случае достаточно было проверить, какие из полученных решений удовлетворяют указанным неравенствам, а какие — нет.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2 \sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ. На множестве

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x \neq 0\}$$

имеем равносильное уравнение

$$\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x| = \sin 4x. \quad (3)$$

Рассмотрим сначала случай

$$\cos 5x \sin 3x \geq 0 \Leftrightarrow \sin 8x - \sin 2x \geq 0. \quad (4)$$

Из (3) получаем:

$$\cos 3x \sin 5x + \cos 5x \sin 3x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x \cos 6x = 0. \quad (5)$$

Можно решить полученное уравнение и отобрать корни, удовлетворяющие условию (4); для этого, однако, придётся рассмотреть 12 случаев (перебирая все остатки от деления на 12). Мы поступим иначе.

Во-первых, заметим, что промежуточное равенство  $\sin 8x = \sin 4x$  из цепочки (5) позволяет заменить условие (4) на равносильное неравенство

$$\sin 4x - \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos 2x - 1) \geq 0.$$

Во-вторых, продолжим преобразование уравнения (5):

$$\sin 2x \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(4 \cos^2 2x - 3) = 0$$

(в последнем переходе учтено ограничение  $x \in E$ ). Итак, исходное уравнение на множестве  $E$  в рассматриваемом случае равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x \left( \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0, \\ \sin 2x(2 \cos 2x - 1) \geq 0. \end{cases}$$

Если  $\sin 2x = 0$ , то  $x = \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Все эти значения служат решениями системы.

Если  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , то в силу неравенства системы имеем  $\sin 2x > 0$ , то есть  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ . Отсюда  $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$  и  $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Если  $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , то в силу неравенства системы имеем  $\sin 2x < 0$ , то есть  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ . Отсюда  $2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$  и  $x = \frac{7\pi}{12} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Две серии  $\frac{\pi}{12} + \pi n$  и  $\frac{7\pi}{12} + \pi n$  можно объединить в одну:  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ .

Перейдём к случаю

$$\cos 5x \sin 3x < 0 \Leftrightarrow \sin 8x - \sin 2x < 0. \quad (6)$$

Из (3) получаем тогда:

$$\cos 3x \sin 5x - \cos 5x \sin 3x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos 2x - 1) = 0.$$

С учётом промежуточного равенства  $\sin 2x = \sin 4x$  имеем вместо (6) равносильное неравенство

$$\sin 8x - \sin 4x < 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos 6x < 0 \Leftrightarrow \sin 2x(4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x) < 0.$$

Таким образом, исходное уравнение на множестве  $E$  в рассматриваемом случае равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x(2 \cos 2x - 1) = 0, \\ \sin 2x(4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x) < 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы получаем  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ , и тогда из неравенства системы имеем  $\sin 2x > 0$ , то есть  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Отсюда  $2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$  и  $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

ОТВЕТ:  $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

В некоторых ситуациях не следует торопиться снимать модуль с тригонометрического выражения.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4} - 2 \cos 2x\right) |2 \cos 2x + 1| = \cos x(\cos x - \cos 5x).$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение сводится к алгебраическому с помощью замены  $t = \cos 2x$ . В самом деле, удвоенная правая часть равна

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x - 2 \cos x \cos 5x &= 1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x = 1 + t - (2t^2 - 1) - (4t^3 - 3t) = \\ &= 2 + 4t - 2t^2 - 4t^3 = (2t + 1)(2 - 2t^2). \end{aligned}$$

Уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{7}{2} - 4t\right) |2t + 1| = (2t + 1)(2 - 2t^2). \quad (7)$$

Значение  $t = -\frac{1}{2}$  является корнем уравнения (7).

Пусть  $2t + 1 > 0$ . Снимая модуль и сокращая на ненулевой множитель  $2t + 1$ , приходим к уравнению

$$\frac{7}{2} - 4t = 2 - 2t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 0$$

с корнями  $t_1 = \frac{1}{2}$  и  $t_2 = \frac{3}{2}$ . Корень  $t_2$  мы отбросим, так как  $t_2 > 1$ .

Пусть теперь  $2t + 1 < 0$ . Действуя аналогично, приходим к уравнению

$$2t^2 + 4t - \frac{11}{2} = 0$$

с корнями  $t_3 = \frac{-2-\sqrt{15}}{2} < -1$  и  $t_4 = \frac{-2+\sqrt{15}}{2} > -\frac{1}{2}$ . Оба они не годятся.

Итак, имеем  $t = \pm \frac{1}{2}$  и легко получаем ответ.

ОТВЕТ:  $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ .

## Задачи

1. («Ломоносов», 2013) Решить уравнение

$$\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} |\cos x| = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{11}{11} + \frac{12}{11}, u \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{11}$$

2. (МФТИ, 1993) Решить уравнение

$$\sin 3x + |\sin x| = \sin 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{3}{\pi} + 2\pi n, \frac{2}{\pi}, \pi n,$$

3. (МФТИ, 1993) Решить уравнение

$$|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi} + 2\pi n, \frac{2}{\pi}, \pi n,$$

4. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\sin 3x - 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{13}}, \pi n,$$

5. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$3|\cos x| + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{4}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{13}}, \pi n,$$

6. («Физтех», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{6}{\pi} + 2\pi n, \frac{6}{\pi} - \frac{6}{\pi} + 2\pi n, \frac{3}{\pi} + 2\pi n,$$

7. («Физтех», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{6}{5\pi} - \frac{12}{7\pi} + 2\pi n, \frac{12}{7\pi} + 2\pi n, \frac{12}{\pi}$$

8. («Физтех», 2015, 11) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2} \cos 2x + 2\right) |2 \cos 2x - 1| = \cos x (\cos x + \cos 5x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{\pi} + \frac{9}{\pi} \mp$$

9. («Физтех», 2015, 11) Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \left| \cos 2x + \frac{1}{2} \right| = \sin^2 x + \sin x \sin 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{\pi} + \frac{9}{\pi} \mp$$

10. («Физтех», 2016, 11) Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{1} \arcsin \mp$$

11. («Физтех», 2016, 11) Решите уравнение

$$\frac{3 \sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 7|\cos x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{3} \arccos \mp$$

12. («Физтех», 2016, 11) Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \left(\frac{\pi}{1-\sqrt{13}}\right) \arccos -$$

13. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 2x = 3|\cos x| - \cos 4x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{2}{\pi} 2\pi n,$$

14. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3|\sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} 2\pi n,$$

15. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\sin x + |\cos x| = \sin 4x + \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi + 2\pi n, \frac{4}{3}\pi + 2\pi n, \frac{5}{3}\pi + 2\pi n, \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \frac{7}{3}\pi + 2\pi n, \frac{8}{3}\pi + 2\pi n, \frac{9}{3}\pi + 2\pi n,$$

16. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\cos x + |\sin x| + \sin 4x = -\cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \pi + 2\pi n, \frac{5}{2}\pi + 2\pi n, \frac{7}{2}\pi + 2\pi n, \frac{9}{2}\pi + 2\pi n,$$

17. («Ломоносов», 2011) Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x - \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x||$$

на промежутке  $(-2\pi; 2\pi]$ .

$$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\} \cap [\pi; 0] \cap [\pi - ; \pi - ]$$

18. («Ломоносов», 2014) Найдите наименьший корень уравнения

$$|\sin 2\pi x + \cos \pi x| = ||\sin 2\pi x| - |\cos \pi x||,$$

принадлежащий промежутку  $(-2; -\frac{1}{4})$ .

0.1

19. («Ломоносов», 2009) Сколько решений на отрезке  $[0; \pi]$  имеет уравнение

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|?$$

0.1

20. (ОММО, 2009) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку  $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}]$ .

0

21. («Ломоносов», 2007) Найдите все значения  $x \in (-\pi; 0]$ , удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

$0 \geq x > \frac{9}{\pi} - \frac{8}{\pi} - \frac{8}{\pi} - \frac{8}{\pi}$

22. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2009) Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 2x = |\sin 2x|^{-1}.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{8}{\pi}, u\pi + \frac{\pi}{\pi}$

23. (МГУ, экономический ф-т, 2008) Решить уравнение

$$\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{\pi}{\pi}$

24. (МГУ, мехмат, 2007) Решить уравнение

$$3 \cos x |3 \sin x + \cos x| = \sin x |\cos x - 3 \sin x|.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{8}{1} - \frac{8}{\pi}$

25. (МГУ, мехмат, 2006) Решить уравнение

$$|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \pi$

26. (МГУ, ф-т гос. управления, 2006) Решите уравнение

$$\sin |1 - 2x| + \cos x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi \pm \frac{\pi}{2} \mp \pi$$

27. («Физтех», 2008) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\cos 2x|} = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{2}$$

28. («Физтех», 2008) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x - \cos^3 x \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 6x}{|\sin x|} = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

29. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$\sin 2x = 2 \sin^3 |x| + \sin 2x \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi (0 \geq \pi) \pi \pi \pi + \frac{\pi}{2} - (1 - \geq \pi) \pi \pi \pi + \frac{\pi}{2}, u\pi$$

30. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$2 \cos 2x = 2 \cos^3 x + \sin 2x \sin |x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi (1 - \geq \pi) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} (1 \leq \pi) \pi \pi \pi + \frac{\pi}{2} - (0 \leq \pi) \pi \pi \pi + \frac{\pi}{2}, u\pi$$

31. («Физтех», 2007) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x + 4 \sin^2 x - 1}{\cos x - 1} = |\cos x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi \pi + \pi$$

32. («Физтех», 2007) Решить уравнение

$$\frac{\sin 9x + 4 \sin^2 3x - 3}{1 - \sin 3x} = |\sin 3x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{2}$$

33. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|} = \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \right) \cos \cos \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{2} \mp$$

34. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\frac{2 \sin 3x}{\sin x} = \frac{|\cos 6x|}{\cos 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{1-\sqrt{2}}, \text{сочетая } \frac{\pi}{1} \mp, u\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}-1}, \text{сочетая } \frac{\pi}{1} \mp$$

35. (МФТИ, 1995) Решить уравнение

$$\frac{2 \sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1.$$

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right\} \ni \pi, \mathbb{Z} \ni u, u\pi + \pi$$

36. (МФТИ, 1995) Решить уравнение

$$\frac{(\sqrt{3} + 1) \cos 3x - \cos 5x}{|\cos x|} = \sqrt{3}.$$

$$\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \ni \pi, \mathbb{Z} \ni u, u\pi + \pi$$

37. (МФТИ, 1998) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{|\sin x|} + \frac{3 \sin x}{\sin 3x} = -2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

38. (МФТИ, 1998) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{2|\cos x|}{\cos 3x} = -1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \pi, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

39. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$\sqrt{2} + \cos x - |\sin x| = 2\sqrt{2} \sin^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{7\pi}{11}, \pi + 2\pi n, \frac{\pi}{11} \mp$$

40. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$2 + \sqrt{3} \sin 2x - |\cos 2x| = 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{4}, u\pi + \frac{6\pi}{11}, u\pi + \frac{6\pi}{4}, u\pi + \frac{6\pi}{11}, u\pi + \frac{6\pi}{4}$$

41. (МФТИ, 2001) Решить уравнение

$$\text{ctg } x + \text{ctg } 3x = 4|\cos x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{10\pi}{3}, u\pi + \frac{10\pi}{3}, u\pi + \frac{\pi}{3}$$



42. (МФТИ, 2001) Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{4}, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{\pi}{6}$$

43. (МФТИ, 2001) Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x - \cos 3x + \cos 2x - \cos x}{\sin 4x - \sin 3x - \sin 2x + \sin x} = \frac{\sqrt{2} |2 \cos^2 x - 1|}{\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{8}, u\pi + \frac{\pi}{4}, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{3\pi}{8}$$

44. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \cos 5x + |\sin 5x \sin 3x|}{\sin 2x} = 2 \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{4}, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{\pi}{6}$$

45. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2 \sin 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{4}, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{\pi}{6}$$