Преобразования тригонометрических уравнений

Данный листок является непосредственным продолжением материалов «Тригонометрические уравнения. 1» и «Тригонометрические уравнения. 2». В нём рассматриваются тригонометрические уравнения, при решении которых используются тождественные преобразования тригонометрических выражений. Эти уравнения предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в МГУ, МФТИ и различных олимпиадах.

Задача. (*МГУ, филологич. ф-т, 2007*) Решите уравнение

$$6\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0.$$

Решение. Пользуясь формулой приведения $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, получаем:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Уравнение принимает вид

$$6\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$$

Делаем замену $t=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$:

$$6(1-2t^2)+5t+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 12t^2-5t-7=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &t=1,\\ &t=-\frac{7}{12}.\end{aligned}\right.$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{7}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(2\cos^2x-\sin^2x\cos 2x-1\right)=1.$$

Решение. Преобразуем выражение в скобках:

$$2\cos^2x-\sin^2x\cos 2x-1=\cos 2x-\sin^2x\cos 2x=\cos 2x\cos^2x.$$

Наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 3x\cos 2x\cos x=1,\\ \cos x\neq 0.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \cos 3x\cos 2x\cos x=1, \tag{1}$$

поскольку для любого x, удовлетворяющего уравнению (1), неравенство системы выполнено. Так как косинус по модулю не превосходит единицы, необходимым условием равенства в уравнении (1) является $|\cos x|=1$, то есть $x_1=2\pi n$ или $x_2=\pi+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что x_1 и x_2 служат решениями уравнения (1).

Ответ: πn, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Решить уравнение

$$\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(17x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение. Пользуемся формулой приведения $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и превращаем разность синусов в произведение:

$$0=\sin\left(17x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(17x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-11x\right)=2\sin 14x\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right),$$

что равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}14x=\pi n,\\ \dfrac{\pi}{4}+3x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\quad(n\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{14}$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача. (*МФТИ, 1999*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x-\cos x}{\cos 3x-\sin 5x}=1.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l}\sin 3x-\cos x=\cos 3x-\sin 5x,\\ \sin 3x-\cos x\neq 0.\end{array}\right. \tag{2}$$

Преобразуем уравнение (2):

$$\sin 3x+\sin 5x=\cos 3x+\cos x\quad\Leftrightarrow\quad 2\sin 4x\cos x=2\cos 2x\cos x\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\cos x(\sin 4x-\cos 2x)=0\quad\Leftrightarrow\quad\cos x\cos 2x(2\sin 2x-1)=0.$$

Следовательно, уравнение (2) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos 2x=0,\\ \sin 2x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Если $\cos x=0$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ ($n\in\mathbb{Z}$). При таких значениях x имеем $\sin 3x=\pm 1$; неравенство системы (2) выполнено, и данные значения x являются решениями исходного уравнения.

Если $\cos 2x=0$, то $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ ($n\in\mathbb{Z}$). Чтобы проверить неравенство (2), разобьём данное множество значений x на четыре серии, в каждой из которых значения отличаются на $2\pi n$.

$$x_1=\frac{\pi}{4}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad\sin 3x_1-\cos x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0;$$
$$x_2=\frac{3\pi}{4}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad\sin 3x_1-\cos x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0;$$
$$x_3=-\frac{\pi}{4}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad\sin 3x_1-\cos x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0;$$
$$x_4=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad\sin 3x_1-\cos x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Как видим, годятся лишь x_2 и x_3. Их можно объединить в одну серию: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Наконец, если $\sin 2x = \frac{1}{2}$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Тем же способом, что и выше, убеждаемся, что все эти значения x удовлетворяют неравенству (2).

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача. (*«Физтех», 2010*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 7x \cos x - \sin 5x \cos 3x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

Решение. При ограничении

$$\cos 2x - \sin 2x \neq 0 \tag{3}$$

данное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin 7x \cos x - 2\sin 5x \cos 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 8x + \sin 6x - (\sin 8x + \sin 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin 6x - \sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \cos 4x = 0.$$

Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этих значениях x имеем $\cos 2x = \pm 1$, так что неравенство (3) выполнено.

Пусть теперь $\cos 4x = 0$, то есть

$$0 = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x).$$

При ограничении (3) это равносильно

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача. (*МФТИ, 2002*) Решить уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$$

Решение. Пользуемся формулами понижения степени:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 + \operatorname{ctg} 3x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x + \cos 4x = 2\operatorname{ctg} 3x \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 3x \cos x = 2\frac{\cos 3x}{\sin 3x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x\left(\cos x - \frac{1}{\sin 3x}\right) = 0.$$

При ограничении

$$\sin 3x \neq 0 \tag{4}$$

уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &\cos 3x = 0, \\ &\cos x \sin 3x = 1. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Если $\cos 3x = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этом $\sin 3x = \pm 1$, так что неравенство (4) выполнено.

Пусть теперь $\cos x \sin 3x = 1$. Так как косинус и синус по модулю не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено только при $|\cos x| = 1$, то есть при $x = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Но при таких x имеем $\sin 3x = 0$. Следовательно, второе уравнение совокупности (5) не имеет решений.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача. (*«Физтех», 2009*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2\cos x} = \operatorname{ctg}^2 x.$$

Решение. Преобразуем левую часть, используя формулы тройного угла:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2\cos x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{(4\cos^3 x - 3\cos x) + 2\cos x} = \frac{\sin x\,(3 - 4(1-\cos^2 x))}{\cos x(4\cos^2 x - 1)} = \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{\cos x(4\cos^2 x - 1)}.$$

Поэтому при ограничении

$$4\cos^2 x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x \neq -\frac{1}{2} \tag{6}$$

наше уравнение равносильно

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^3 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Легко видеть, что эти значения x удовлетворяют неравенству (6).

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача. (*МФТИ, 2007*) Решить уравнение

$$11 + \cos 8x = -12\,\frac{\cos 4x}{\sin 3x} - 10\operatorname{ctg}^2 3x.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$11 + \cos 8x = 11 + 2\cos^2 4x - 1 = 10 + 2\cos^2 4x.$$

При ограничении

$$\sin 3x \neq 0 \tag{7}$$

наше уравнение равносильно уравнению

$$\left(5 + \cos^2 4x\right)\sin^2 3x + 6\cos 4x \sin 3x + 5\cos^2 3x = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 4x \sin^2 3x + 6\cos 4x \sin 3x + 5 = 0.$$

Замена $t = \cos 4x \sin 3x$ приводит к квадратному уравнению $t^2 + 6t + 5 = 0$ с корнями $t = -1$ и $t = -5$. Поскольку синус и косинус не превосходят по модулю единицу, уравнение $\cos 4x \sin 3x = -5$ не имеет решений. Остаётся рассмотреть уравнение

$$\cos 4x \sin 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - \sin 7x = 2,$$

которое (опять-таки по причине того, что модуль синуса не более 1) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 7x = -1. \end{cases}$$

Решения первого уравнения системы суть $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$; легко видеть, что они удовлетворяют и второму уравнению, а также ограничению (7). Следовательно, эти значения x служат решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin \pi x = -\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{2}\,.$$

$\boxed{-\frac{2}{3}}$

2. (*ОММО, 2011*) Решите уравнение $2|x+2| \cos x = x + 2$.

$\boxed{2;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \leqslant -1;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \leqslant 0;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \geqslant 0;\ n \in \mathbb{Z}}$

3. (*МГУ, филологич. ф-т, 2007*) Решить уравнение

$$5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 1.$$

$\boxed{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{6} + (-1)^n \arcsin\frac{3}{5} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

4. (*МФТИ, 2006*) Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x\right)^2 = 7 + 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$\boxed{\frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

5. (*МГУ, централизованный экзамен, 2009*) Решить уравнение

$$2\cos^2 x - 5 \sin 2x + \frac{6t}{\pi} = 0,$$

где $t = \arccos\left(\cos\frac{23\pi}{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

6. (*МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2010*) Решите уравнение

$$2\sin^4 x + 7\cos^3 x = 2.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

7. (*МГУ, ИСАА, 2005*) Решите уравнение

$$\cos 4x = 4 \cos x \cos 2x - 1.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x - 6\cos^2 2x + 8\cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Решите уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}}$

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Сколько различных решений на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$6\sqrt{2}\cos x \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{2}\operatorname{ctg} x - 3\cos x + 1 = 0\,?$$

Найдите эти решения.

$\boxed{\text{Два решения; } \pm\arccos\frac{1}{3}}$

11. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}\left(1 - 2\sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x\right) = 1.$$

$\boxed{\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

12. (*«Физтех», 2014*) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,.$$

$\boxed{\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

13. (*«Физтех», 2014*) Решите уравнение

$$\frac{\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{9\cos^2 x + 7\sin^2 x - 8} - \frac{\cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{8 - 7\cos^2 x - 9\sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\,.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{12}{\cos 2x}\,.$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

15. (*МФТИ, 1993*) Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x + \sin x}\,,$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

$\boxed{-\frac{\pi}{20},\ -\frac{9\pi}{20}}$

16. (*МФТИ, 1994*) Решить уравнение

$$\frac{2\cos x + \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x - \sin 2x} = \operatorname{tg} 2x.$$

$\boxed{\pi \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

17. (*МФТИ, 2002*) Решить уравнение

$$\frac{3 + 4\cos 2x - 8\cos^4 x}{\sin 2x - \cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x}\,.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

18. (*МГУ, экз. для иностр. гр-н, 2010*) Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

$\boxed{\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

19. (*МГУ, физический ф-т, 2007*) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2\sin x} = 1.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Решить уравнение

$$\sin\left(14x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(20x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$\boxed{\frac{\pi n}{17},\ -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}}$

21. (*МГУ, химический ф-т, 2006*) Решить уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

22. (*МФТИ, 1999*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x + \sin 5x}{\cos x + \sin 3x} = -1.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + \pi n,\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

23. (*МФТИ, 2006*) Решить уравнение

$$5\sin 3x + 16\cos x + 5\sin x = 12\cos^3 x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

25. (*«Физтех», 2012*) Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbb{Z}}$

26. (*МФТИ, 2002*) Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

$\boxed{2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}}$

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Решить уравнение

$$6\cos 9x\cos 2x = 1 + 3\cos 11x + 2\cos^3 7x.$$

$\boxed{\frac{2\pi n}{7},\ \pm\frac{1}{7}\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}}$

28. (*«Физтех», 2010*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x\cos 3x - \sin 7x\cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

29. (*«Физтех», 2009*) Найти решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} + 8\sin x \sin 3x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant 0$.

$\boxed{\pi n,\ \alpha + 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi n,\ \pi - \alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha = \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)}$

30. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Найдите сумму корней уравнения

$$\cos^2 x + \cos^2 3x - 2\cos x \cos 2x \cos 3x = \sin^2 4x,$$

принадлежащих отрезку $[\pi; 2\pi]$. В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденной сумме.

$\boxed{33}$

31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Найдите все общие точки графиков

$$y = 8\cos \pi x \cdot \cos 2\pi x \cdot \cos^2 4\pi x \quad \text{и} \quad y = \cos 11\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку $[0; 1]$. В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

$\boxed{4{,}5}$

32. (*МФТИ, 1997*) Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x.$$

$\boxed{\pi n,\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}}$

33. (*МФТИ, 2000*) Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24\cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

34. (*МГУ, ф-т психологии, 2006*) Решить уравнение

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x \cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x \sin 2x - 162.$$

$\boxed{\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

35. (*ОММО, 2012*) Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.

$\boxed{\frac{11\pi}{5}}$

36. (*МГУ, ИСАА, 2006*) Решите уравнение:

$$3+6\cos 2x+3\cos 4x+2\cos 6x=0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

37. (*«Физтех», 2009*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x-2\sin x}=\operatorname{tg}^2 x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

38. (*МФТИ, 2008*) Решить уравнение

$$\frac{4\cos 4x\cos^2 2x-3\cos 2x-\cos 6x}{2\sin^2 x-1}=0.$$

$\boxed{\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}}$

39. (*МГУ, геологич. ф-т, 2006*) Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x+\cos 3x)}{\cos 2x-\sin 3x}=1,$$

расположенные в интервале $(1;2)$.

$\boxed{\frac{11\pi}{30}}$

40. (*МГУ, геологич. ф-т, 2008*) Найти корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\sin 2x-2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\cos 2x}{\cos\left(x-\frac{7\pi}{3}\right)}=0,$$

расположенные на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\frac{7\pi}{2}}$

41. (*МГУ, географич. ф-т, 2006*) Решить уравнение

$$2\sin x-\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x-1=0.$$

$\boxed{\pi+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

42. (*МФТИ, 2007*) Решить уравнение

$$9+\cos 12x=10\,\frac{\cos 6x}{\sin 5x}-8\operatorname{ctg}^2 5x.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

43. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi;\pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2\cos 4x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}=\frac{2\sin 4x-\sqrt{3}}{2\sin x-1},$$

и найдите эти корни.

Четыре корня: $-5\pi/6$, $-\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$

44. (*МФТИ, 1993*) Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{\sin 6x}=\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\cos 6x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$\frac{11\pi}{30}$

45. (*МГУ, химический ф-т, 2005*) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg} 4x+\cos 5x.$$

$\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$

46. (*«Физтех», 2012*) Найдите наименьший корень уравнения

$$\operatorname{ctg} 6x-\operatorname{tg} 5x=\frac{1}{\cos 5x},$$

принадлежащий отрезку $\left[\frac{8\pi}{17};\frac{40\pi}{17}\right]$.

$\frac{21\pi}{34}$

47. (*«Физтех», 2010*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x\cos 10x-\sin 4x\cos 8x}{\cos 2x}=0.$$

$\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$

48. (*МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2010*)
а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x+\cos x)^2}{\cos 2x}+\frac{32(1+7\operatorname{ctg} x\operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x+7\operatorname{tg} 4x}+7=0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0;120\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

а) $\operatorname{arctg} 4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $120\operatorname{arctg} 4+7140\pi<23040$

49. (*МГУ, ВМК, 2007*) Найдите все решения уравнения

$$2\sin\left(x+\frac{7\pi}{25}\right)\cdot\sin\left(3x+\frac{18\pi}{25}\right)=\cos 4x+2^{\cos\frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10};\frac{4\pi}{5}\right]$.

$-\frac{19\pi}{200},\ \frac{131\pi}{200}$

50. (*«Физтех», 2009*) Найти решения уравнения

$$\frac{\sin x}{\cos 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin x}+4(\sin 4x+\sin 2x)=8\cos x\sin 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ k=0,1,6,7$

51. (*«Физтех», 2009*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x}{4\cos x+\cos 3x}=-4\sin^3 x.$$

$\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

52. (*«Физтех», 2009*) Решить уравнение

$$\operatorname{tg}3x+\frac{1}{\cos 3x}=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin 4x}{\cos x\cos 3x}\,.$$

$\pi n,\ (-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

53. (*МФТИ, 2008*) Решить уравнение

$$\frac{64\sin^3 x\cos^5 x+\sin 6x-3\sin 2x}{\sin x\cos x}=0.$$

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

54. (*МФТИ, 2006*) Решить уравнение

$$8\cos^2 x\sin x+\cos x=\cos 3x+6\sin x.$$

$\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

55. (*МФТИ, 2006*) Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}4x}=\frac{\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}\,.$$

$\frac{\pi n}{7}\ (n\neq 7k),\ k,n\in\mathbb{Z}$

56. (*МФТИ, 1997*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2\cos 2x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

57. (*МФТИ, 2000*) Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16\cos 4x(1 + 2\cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}\,.$$

$\boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

58. (*МФТИ, 2000*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x\cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x\cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

$\boxed{\frac{\pi n}{8},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 2 + 4k,\ n \neq 4 + 8k,\ k \in \mathbb{Z}}$

59. (*МФТИ, 2001*) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x\sin 3x = 6\cos 2x\sin^2 x.$$

$\boxed{\pi n,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

60. (*МФТИ, 2002*) Решить уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8\sin^4 x}{4(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{\cos x}\,.$$

$\boxed{\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

61. (*МФТИ, 2005*) Решить уравнение

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{\cos x\cos 4x} - \frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}}{\cos 4x\cos 3x} = \frac{2\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 3x} - \frac{1}{5\cos x}\,.$$

$\boxed{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{6}{7} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

62. (*МФТИ, 2005*) Решить уравнение

$$\frac{\sin^5 x - \cos^5 x}{\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \frac{7}{8} - \frac{3}{2}\cos 2x.$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

63. (*МФТИ, 2007*) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi\sin^2 x+\pi}{4\sin^6 x+1}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4\sin^6 x+1}\right)=0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}}$

64. (*МГУ, мехмат, 2009*) Решить уравнение

$$\cos 4x+\sin\left(2x-\frac{a\pi}{64}\right)=\sin 3x,$$

где a — наименьшее из таких двузначных натуральных чисел, при приписывании которых справа к числу 20092009 полученное десятизначное число делится на 36.

$\boxed{\frac{\pi n}{3},\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

65. (*МГУ, мехмат, 2008*) Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad \frac{4\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad n,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k,\quad n,k\in\mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

Да. Пример: $(\sin 3x-1)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

66. (*Олимпиада СПбГУ, 2011*) Решить уравнение

$$4\cos x-\cos 3x+3=3\sin 3x.$$

$\boxed{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \pi+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

67. (*«Ломоносов», 2006*) Решите уравнение

$$\sin(x^2+x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

$\boxed{\pm\sqrt{2\pi n},\ -1\pm\sqrt{1+\pi+2\pi n},\ n=0,1,2,\ldots}$

68. (*«Ломоносов», 2015*) Найдите все значения x, при которых числа $4\operatorname{ctg}(\pi x)$, $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{3}$ и $6\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений x выберите принадлежащие отрезку $[3;9]$ и запишите в ответ их сумму.

$\boxed{48}$

69. (*«Ломоносов», 2016*) Решите уравнение

$$5\sin\left(2x+\arccos\frac{4}{5}\right)+8\sqrt{5}\sin\left(x-\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=11.$$

В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{7\pi}{3};\frac{7\pi}{2}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

$\boxed{9{,}42}$

70. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2008*) Решите уравнение

$$\cos 6x-3\cos 5x+\cos 4x-4\cos x+5=0.$$

$\boxed{2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

71. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Решите уравнение

$$\sin\left(x+3^0\cdot\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(x+3^1\cdot\frac{2\pi}{7}\right)+\ldots+\sin\left(x+3^5\cdot\frac{2\pi}{7}\right)=1.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

72. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011*) Найдите наименьшее натуральное решение уравнения

$$\sin(2011x)^\circ=\sin x^\circ.$$

$\boxed{12}$

73. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011*) Решите уравнение

$$\sin(\sin x)=\sin(\cos x+1).$$

$\boxed{\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

74. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Определите, сколько корней уравнения

$$4\sin 2x+3\cos 2x-2\sin x-4\cos x+1=0$$

расположено на отрезке $\left[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2015}\pi\right]$. В ответ запишите сумму всех цифр найденного числа.

$\boxed{18135}$

75. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Решите уравнение

$$(1-\cos x)(2+\sin x+4\cos x)+5(1+\cos x)(2-\sin x+2\cos x)=0.$$

В ответ запишите сумму всех корней уравнения на промежутке $[1018\pi;1019\pi]$, округлённую до сотых.

$\boxed{6342{,}03}$

76. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 11.5*) Рассмотрим уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = -1$. Сколько у него решений на промежутке $[0, 6\pi]$?