Системы тригонометрических уравнений

В данной статье мы рассматриваем тригонометрические системы двух уравнений с двумя неизвестными. Методы решения таких систем и различные специальные приёмы мы будем изучать сразу на конкретных примерах.

Может случиться, что одно из уравнений системы содержит тригонометрические функции от неизвестных x и y, а другое уравнение является линейным относительно x и y. В таком случае действуем очевидным образом: одну из неизвестных выражаем из линейного уравнения и подставляем в другое уравнение системы.

Задача 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения выражаем y через x:

$$y = \pi - x,$$

и подставляем во второе уравнение:

$$\sin x + \sin(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}.$$

Получилось простейшее тригонометрическое уравнение относительно x. Его решения запишем в виде двух серий:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся найти соответствующие значения y:

$$y_1 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n, \quad y_2 = \pi - x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n.$$

Как всегда в случае системы уравнений, ответ даётся в виде перечисления пар $(x; y)$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Обратите внимание, что x и y связаны друг с другом посредством целочисленного параметра n. А именно, если в выражении для x стоит $+2\pi n$, то в выражении для y автоматически появляется $-2\pi n$, причём **с тем же самым** n. Это — следствие «жёсткой» зависимости между x и y, задаваемой уравнением $x + y = \pi$.

Задача 2. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Решение. Здесь имеет смысл сначала преобразовать первое уравнение системы:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2y = -1 \Leftrightarrow 2\cos(x + y)\cos(x - y) = -1.$$

Таким образом, наша система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 2\cos(x+y)\cos(x-y) = -1, \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3}\,. \end{cases}$$

Подставляем $x - y = \dfrac{2\pi}{3}$ в первое уравнение:

$$2\cos(x+y)\cos\frac{2\pi}{3} = -1 \;\Leftrightarrow\; \cos(x+y) = 1 \;\Leftrightarrow\; x + y = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

В результате приходим к системе:

$$\begin{cases} x + y = 2\pi n, \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3}\,. \end{cases}$$

Складываем эти уравнения, делим на 2 и находим x; вычитаем из первого уравнения второе, делим на 2 и находим y:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad y = -\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n; -\dfrac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

В ряде случаев тригонометрическую систему удаётся свести к системе алгебраических уравнений подходящей заменой переменных.

Задача 3. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

Решение. Замена $u = \sin x$, $v = \cos y$ приводит к алгебраической системе относительно u и v:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$$

Эту систему вы без труда решите самостоятельно. Решение единственно: $u = 1$, $v = 0$. Обратная замена приводит к двум простейшим тригонометрическим уравнениям:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 0, \end{cases}$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Теперь в записи ответа фигурируют **два** целочисленных параметра k и n. Отличие от предыдущих задач состоит в том, что в данной системе отсутствует «жёсткая» связь между x и y (например, в виде линейного уравнения), поэтому x и y в гораздо большей степени независимы друг от друга.

В данном случае было бы ошибкой использовать лишь один целочисленный параметр n, записав ответ в виде $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n; \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$. Это привело бы к потере бесконечного множества решений системы. Например, потерялось бы решение $\left(\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, возникающее при $k=1$ и $n=0$.

Задача 4. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin y = 1, \\ \cos 2x + 2\cos 2y = 2. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем сначала второе уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x + 2(1 - 2\sin^2 y) = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 4\sin^2 y = 1.$$

Теперь делаем замену: $u = \sin x$, $v = \sin y$. Получим систему:

$$\begin{cases} u + 2v = 1, \\ 2u^2 + 4v^2 = 1. \end{cases}$$

Решениями этой системы служат две пары: $u_1 = 0$, $v_1 = 1/2$ и $u_2 = 2/3$, $v_2 = 1/6$. Остаётся сделать обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{2}{3}, \\ \sin y = \dfrac{1}{6}, \end{cases}$$

и записать ответ.

Ответ: $\left(\pi k; (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left((-1)^k \arcsin\dfrac{2}{3}+\pi k; (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{6}+\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Здесь для получения алгебраической системы нужно поработать ещё больше. Первое уравнение нашей системы запишем в виде:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1.$$

Во втором уравнении имеем:

$$\frac{3}{2} = 2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) =$$
$$= 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1 - \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) = 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 2\cos^2\frac{x+y}{2}.$$

Таким образом, исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \cos^2\dfrac{x-y}{2} - \cos^2\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Делаем замену

$$u = \cos\frac{x-y}{2}\,, \quad v = \cos\frac{x+y}{2}$$

и получаем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} uv = \dfrac{1}{2}\,, \\ u^2 - v^2 = \dfrac{3}{4}\,. \end{cases}$$

Решениями этой системы служат две пары: $u_1 = 1$, $v_1 = 1/2$ и $u_2 = -1$, $v_2 = -1/2$.
Первая пара даёт систему:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2\pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \quad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k).$$

Вторая пара даёт систему:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \quad y = -\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k).$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n+k); \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right)$, $\left(\pi \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n+k); -\pi \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Однако свести систему тригонометрических уравнений к системе алгебраических уравнений удаётся далеко не всегда. В ряде случаев требуется применять различные специальные приёмы.

Иногда удаётся упростить систему путём сложения или вычитания уравнений.

Задача 6. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{3}{4}\,, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая эти уравнения, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

А эта система, в свою очередь, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n); \dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n)\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3} + \pi(k+n); -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n)\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Иногда можно прийти к решению, умножая уравнения друг на друга.

Задача 7. Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{2}\sin y, \\ \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}\cos y. \end{cases}$$

Решение. Напомним, что умножить уравнения системы друг на друга — это значит записать уравнение вида «произведение левых частей равно произведению правых частей». Полученное уравнение будет следствием исходной системы (то есть все решения исходной системы удовлетворяют и полученному уравнению).

В данном случае умножение уравнений системы приводит к уравнению:

$$1 = 2\sin y \cos y = \sin 2y,$$

откуда $y = \pi/4 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Подставлять y в таком виде в систему неудобно — лучше разбить на две серии:

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

Подставляем y_1 в первое уравнение системы:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2}\sin y_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Легко видеть, что подстановка y_1 во второе уравнение системы приведёт к тому же самому результату.

Теперь подставляем y_2:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2}\sin y_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi k; -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Иногда к результату приводит деление уравнений друг на друга.

Задача 8. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем:

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 1, \\ 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Введём временно обозначения: $\alpha = \dfrac{x+y}{2}$, $\beta = \dfrac{x-y}{2}$. Тогда полученная система перепишется в виде:

$$\begin{cases} 2\cos\alpha\cos\beta = 1, \\ 2\sin\alpha\cos\beta = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ясно, что $\cos\beta \neq 0$. Тогда, поделив второе уравнение на первое, придём к уравнению

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3},$$

которое является следствием системы. Имеем:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

и снова (в целях дальнейшей подстановки в систему) нам удобно разбить полученное множество на две серии:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n.$$

Подстановка α_1 в любое из уравнений системы приводит к уравнению:

$$\cos\beta = 1 \ \Leftrightarrow \ \beta_1 = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Аналогично, подстановка α_2 в любое из уравнений системы даёт уравнение:

$$\cos\beta = -1 \ \Leftrightarrow \ \beta_2 = \pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Итак, имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \beta_1 = 2\pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, \\ \beta_2 = \pi + 2\pi k, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \dfrac{x-y}{2} = 2\pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, \\ \dfrac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-k) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{3} + 2\pi(n+k), \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-k). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n+k); \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{3} + 2\pi(n+k); \dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

В некоторых случаях на помощь приходит основное тригонометрическое тождество.

Задача 9. Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = 1 - \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \cos y. \end{cases}$$

Решение. Возведём обе части каждого уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x = (1 - \sin y)^2, \\ 2\cos^2 x = \cos^2 y. \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения:

$$2 = (1 - \sin y)^2 + \cos^2 y = 1 - 2\sin y + \sin^2 y + \cos^2 y = 2 - 2\sin y,$$

откуда $\sin y = 0$ и $y = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Это — следствие исходной системы; то есть, для всякой пары $(x; y)$, являющейся решением системы, второе число этой пары будет иметь вид πn с некоторым целым n.

Разбиваем y на две серии:

$$y_1 = 2\pi n, \quad y_2 = \pi + 2\pi n.$$

Подставляем y_1 в исходную систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = 1 - \sin y_1 = 1, \\ \sqrt{2}\cos x = \cos y_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решением данной системы служит серия

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(Обратите внимание, что теперь недостаточно было бы подставить y_1 в какое-то одно из уравнений системы. Подстановка y_1 в первое и второе уравнение системы приводит к системе двух разных уравнений относительно x.)

Аналогично, подставляем y_2 в исходную систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = 1 - \sin y_2 = 1, \\ \sqrt{2}\cos x = \cos y_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k; 2\pi n\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Иногда в ходе преобразований удаётся получить простое соотношение между неизвестными и выразить из этого соотношения одно неизвестное через другое.

Задача 10. Решить систему:

$$\begin{cases} 5\cos x - \cos y = 3, \\ 2\sin x \sin(y - x) + \cos y = 1. \end{cases}$$

Решение. Во втором уравнении системы преобразуем удвоенное произведение синусов в разность косинусов:

$$\cos(2x - y) - \cos y + \cos y = 1 \Leftrightarrow \cos(2x - y) = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Выражаем отсюда y через x:

$$y = 2x + 2\pi n,$$

и подставляем в первое уравнение системы:

$$5\cos x - \cos 2x = 3 \;\Leftrightarrow\; 5\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 3 \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

Дальнейшее тривиально. Получаем: $\cos x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Остаётся найти y из полученного выше соотношения:

$$y = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k + 2\pi n.$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k + 2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Разумеется, рассмотренные задачи не охватывают всего многообразия систем тригонометрических уравнений. В любой сколько-нибудь непростой ситуации требуется проявлять изобретательность, которая вырабатывается только практикой решения разнообразных задач.

Задачи

Во всех ответах предполагается, что $k, n \in \mathbb{Z}$.

1. Решите систему:

а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1. \end{cases}$

а) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} - 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} - 2\pi n\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2} - \pi n; \pi n\right)$

2. Решите систему:

а) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$

а) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi n\right)$; б) $\left(\frac{3\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$

3. Решите систему:

а) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2}, \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

а) $\left(\frac{7\pi}{6} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n\right)$

4. Решите систему:

а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x + \cos y = 1, \\ 2\sin x - 3\cos y = \sqrt{2}\,. \end{cases}$

а) $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$; б) $\left((-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

5. Решите систему:

а) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}\,, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{3}{4}\,. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -\dfrac{9}{5}\,. \end{cases}$

а) $\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi n\right)$; б) $\left(2\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi k; -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n\right)$, $\left(-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k; 2\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi n\right)$

6. Решите систему:

а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2\sin 2x + \sin 2y = 0. \end{cases}$

а) $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

7. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}\,, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$\left((-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi(k+2n); (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi(k-2n)\right)$, $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi(k+2n+1); (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi(k-2n-1)\right)$

8. Решите систему:

а) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}\,, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}\,. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}\,. \end{cases}$

а) $\left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi(k+n); \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k-n)\right)$; б) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + \pi(k+n); \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right)$

9. Решите систему:

а) $\begin{cases} 4\sin x \cos y = 1, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

а) $\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \pi\left(n - \frac{k}{2}\right); (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi\left(n + \frac{k}{2}\right)\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + 2\pi n\right)$

10. Решите систему:

$$\begin{cases} \cos 2x = \operatorname{tg}\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \cos 2y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

$(\pi k; \pi n)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

11. Решите систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$$

$\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$

12. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(n+k); \frac{5\pi}{6} + 2\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(n+k); -\frac{7\pi}{6} + 2\pi(n-k)\right)$

13. Решите систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{4} + \pi(n+k); \frac{\pi}{4} + \pi(n-k)\right)$

14. Решите систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $-\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$

15. Решите систему:

$$\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5, \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases}$$

$\left(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k; -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi n\right)$, $\left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k; \arccos\frac{1}{8} + 2\pi n\right)$

16. Решите систему:

а) $\begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x = 3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x\cos(x-y) = \sin y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2\sin x\sin(x+y) = \cos y. \end{cases}$

а) $(\pi k; \pi n)$; б) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

17. (*МГУ, экз. для иностр. гр-н, 2012*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4+\cos 2x = 7\sin y, \\ y^2 - x^2 = \pi y - \dfrac{\pi^2}{4}. \end{cases}$$

$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$

18. (*МГУ, ВМК, 2005*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 2(x+y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

$\left(x_n, \frac{\pi}{4}+\pi n - x_n\right)$, где $x_n = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)^2 - 36}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -2, -1, 0, 1$

19. (*МГУ, географич. ф-т, 2005*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

$\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, 2\pi k\right)$, $k, n\in\mathbb{Z}$

20. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2005*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

$1+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

21. (*МФТИ, 1992*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10\cos 2x - 2 = 7\cos x\cos 2y, \\ \sin x = \sqrt{\cos x}\,\sin y. \end{cases}$$

$\left(\arccos\frac{2}{3}+2\pi n, (-1)^k \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}+\pi k\right)$; $\left(-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n, (-1)^{k+1}\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}+\pi k\right)$, $k, n\in\mathbb{Z}$

22. (*МФТИ, 1992*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x} = 3\operatorname{tg} y, \\ \sqrt{2\sin 2x} = \dfrac{4}{3}\sin x\cos y. \end{cases}$$

$\left(\operatorname{arctg} 4+2\pi n, \arccos\frac{3}{4}+2\pi k\right)$; $\left(\pi+\operatorname{arctg} 4+2\pi n, \pi+\arccos\frac{3}{4}+2\pi k\right)$, $k, n\in\mathbb{Z}$

23. (*МФТИ, 1996*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin 3x| = -\sqrt{2}\sin y, \\ \cos 2y + 2\cos 2x \sin^2 2x = \dfrac{3}{4}\,. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k\right);\ k, n \in \mathbb{Z}}$

24. (*МФТИ, 1996*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2\sin 2x = \dfrac{3}{4} + 2\sin^3 2x. \end{cases}$$

$\boxed{\left((-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k\right);\ k, n \in \mathbb{Z}}$

25. (*МФТИ, 1997*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9\cos x\cos y - 5\sin x\sin y = -6, \\ 7\cos x\cos y - 3\sin x\sin y = -4. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k,\ \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \pi n + \pi k\right);\ k, n \in \mathbb{Z}}$

26. (*«Физтех», 2015*) Даны два числа $x < y$. Оказалось, что

$$\sin(\pi x) + \sin(\pi y) = \frac{4\sqrt{2}}{5}\,, \quad \cos(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{3\sqrt{2}}{5}\,.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина $y - x$?

$\boxed{0{,}5}$

27. (*«Физтех», 2015*) Даны два числа $x < y$. Оказалось, что

$$\sin(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{3\sqrt{2}}{5}\,, \quad \cos(\pi x) - \sin(\pi y) = \frac{4\sqrt{2}}{5}\,.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина $y - x$?

$\boxed{1}$

28. (*«Физтех», 2018, 11*) Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\sin y + \cos x = \sin 3x \quad \text{и} \quad \sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x.$$

Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y + \sin x$?

$\boxed{-1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$