Суммы и произведения тригонометрических функций

Ещё одним полезным следствием формул сложения (наряду с формулами двойного угла) служат формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведения и обратно — произведений в суммы.

Начнём с формул синуса суммы и разности:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \tag{1}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

Сложим формулы (1) и (2):

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \tag{3}$$

Отсюда:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).}$$

Мы получили формулу преобразования произведения синуса на косинус в сумму синусов (эта сумма в реальности может оказаться разностью). Примеры:

$$\sin\frac{7\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{11}+\frac{3\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{11}-\frac{3\pi}{11}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{10\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{11}\right);$$

$$\sin 2x\cos 5x=\frac{1}{2}(\sin(2x+5x)+\sin(2x-5x))=\frac{1}{2}(\sin 7x+\sin(-3x))=\frac{1}{2}(\sin 7x-\sin 3x).$$

Промежуточное равенство (3) приводит нас к ещё двум важным формулам. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta, \\ y=\alpha-\beta. \end{cases} \tag{4}$$

Складывая и вычитая эти равенства, выразим из них α и β:

$$x+y=2\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{x+y}{2};$$

$$x-y=2\beta \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{x-y}{2}.$$

Подставляя всё это в (3), получим:

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \tag{5}$$

Это формула преобразования суммы синусов в произведение. Запоминаем словесную формулировку: *сумма синусов есть два синус полусуммы на косинус полуразности.*

Делая в (5) замену y на $-y$, придём к формуле преобразования разности синусов в произведение:

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.}$$

Словами: *разность синусов есть два синус полуразности на косинус полусуммы.*

Теперь проделаем те же самые операции, но начнём с формул косинуса суммы и разности:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{6}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{7}$$

Сложим формулы (6) и (7):

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta. \tag{8}$$

Отсюда:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).}$$

Это формула преобразования произведения косинусов в сумму косинусов.

С помощью замены (4) приходим к формуле преобразования суммы косинусов в произведение косинусов:

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,.}$$

Словами: *сумма косинусов есть два косинус полусуммы на косинус полуразности.*

Теперь вычтем из равенства (7) равенство (6):

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta. \tag{9}$$

Отсюда:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).}$$

Это формула преобразования произведения синусов в разность косинусов.

Делаем в равенстве (9) замену (4) и приходим к формуле преобразования разности косинусов в произведение синусов:

$$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,.$$

В целях единообразия записи поменяем местами x и y в последней формуле:

$$\boxed{\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\,.}$$

Словами: *разность косинусов есть два синус полусуммы на синус* ***обратной*** *полуразности.*