Тригонометрические неравенства

Предполагается, что читатель умеет решать простейшие тригонометрические неравенства. Мы же переходим к более сложным задачам.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x+\frac{1}{2}}>2\cos x$$

на отрезке $\left[-2;\frac{16}{15}\right]$.

Решение. Сделаем замену $t=\cos x$:

$$\sqrt{t+\frac{1}{2}}>2t \tag{1}$$

и решим полученное неравенство относительно t.

При $t<0$ неравенство (1) равносильно неравенству $t+\frac{1}{2}\geqslant 0$. Отсюда имеем первую часть решений: $-\frac{1}{2}\leqslant t<0$.

При $t\geqslant 0$ неравенство (1) равносильно неравенству

$$t+\frac{1}{2}>4t^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4t^2-t-\frac{1}{2}<0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{4}<t<\frac{1}{2},$$

откуда получаем вторую часть решений: $0\leqslant t<\frac{1}{2}$.

Объединяя обе части, находим множество решений неравенства (1): $-\frac{1}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}$. Обратная замена приводит к неравенству

$$-\frac{1}{2}\leqslant\cos x<\frac{1}{2},$$

множество M решений которого является объединением всевозможных промежутков

$$A_n=\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \quad\text{и}\quad B_n=\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$$

при всех целых n:

$$M=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}A_n\cup B_n.$$

Нам остаётся найти пересечение множества M с отрезком $I=\left[-2;\frac{16}{15}\right]$.

Легко понять, что при $n\neq 0$ отрезок I не пересекает ни один из промежутков A_n, B_n (убедитесь в этом самостоятельно). Далее, поскольку $-\frac{2\pi}{3}<-2<-\frac{\pi}{3}$, то $I\cap A_0=\left[-2;-\frac{\pi}{3}\right)$. Наконец, так как

$$\frac{16}{15}-\frac{\pi}{3}=\frac{16-5\pi}{15}>\frac{16-5\cdot 3{,}2}{15}=0,$$

то $I\cap B_0=\left(\frac{\pi}{3};\frac{16}{15}\right]$.

Ответ: $\left[-2;-\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{16}{15}\right]$.

Задача. (*МГУ, ВМК, 2006*) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{ctg}x>\frac{5\cos 2x+7}{5\sin 2x-4},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{12} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Заметим, что при $x \neq \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ имеют место тождества:

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}, \quad \sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}.$$

Делая в исходном неравенстве замену $t = \operatorname{ctg} x$, приходим к рациональному неравенству относительно t:

$$t > \frac{5 \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} + 7}{5 \cdot \frac{2t}{t^2+1} - 4},$$

что после несложных преобразований даёт равносильное неравенство

$$\frac{(2t+1)(t^2+1)}{(t-2)(2t-1)} > 0,$$

легко решаемое методом интервалов:

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \quad t > 2.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < \operatorname{ctg} x < \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg} x > 2. \end{array}\right.$$

Множество M решений данной совокупности:

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cup B_n,$$

где

$$A_n = (\pi n; \operatorname{arcctg} 2 + \pi n), \quad B_n = \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{2} + \pi n; \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n\right).$$

Нам требуется найти пересечение множества M с промежутком $I = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right)$. Очевидно, что при $n \neq 0$ множества A_n и B_n не пересекаются с I, а

$$B_0 \cap I = \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Кроме того,

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3} > 2,$$

поэтому $\frac{\pi}{12} < \operatorname{arcctg} 2$ и

$$A_0 \cap I = \left[\frac{\pi}{12}; \operatorname{arcctg} 2\right). \tag{3}$$

Остаётся объединить промежутки (2) и (3).

Ответ: $\left[\frac{\pi}{12}; \operatorname{arcctg} 2\right) \cup \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Решите неравенство

$$3\sin\left(\frac{2x}{3}\right) \geqslant 5 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right).$$

$\boxed{\frac{3\pi}{4} + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Решите неравенство

$$\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)^7 > 1.$$

$\boxed{\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2\sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

$\boxed{\left[-\frac{1}{2}; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{8}{3}\right]}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2\cos x$$

на отрезке $\left[-2; \frac{16}{15}\right]$.

$\boxed{\left[-2; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}\right]}$

5. (*«Ломоносов», 2016*) Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 8\sin^2\frac{\pi x}{18}} > 4\cos^2\frac{\pi x}{18}.$$

В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 35]$.

$\boxed{297}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Решите неравенство

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x).$$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n; \frac{17\pi}{12} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75;5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}+1}{\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1}\geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}\,.$$

$\boxed{-12}$

8. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите количество всех целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{3\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{4}+1}-\sqrt{6}\cos\frac{\pi x}{4}\geqslant 0,$$

принадлежащих отрезку $[1991;2013]$.

$\boxed{9}$

9. (*МГУ, мехмат, 2009*) Найдите все значения аргумента x, при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x)=\frac{2\cos\frac{\pi(15+x)}{6}+1}{\sqrt{14+5x-x^2}}$$

положительно.

$\boxed{(-2;1)\cup(5;7)}$

10. (*МГУ, физический ф-т, 2008*) Найти множество решений неравенства

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9x}{\pi}\right)^2>\cos 3x.$$

Ответ обосновать, используя свойства функций $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9x}{\pi}\right)^2$ и $y=\cos 3x$.

$\boxed{\left(-\infty;-\frac{\pi}{9}\right)\cup\left(\frac{\pi}{9};+\infty\right)}$

11. (*МГУ, ВМК, 2006*) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg}x>\frac{9-3\cos 2x}{3\sin 2x-2}\,,$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2};\,\frac{\pi}{2}\right)}$

12. (*МФТИ, 1998*) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7-\cos 4x}{2}}>-2\sin x.$$

$\boxed{\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\,\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}}$

13. (*МФТИ, 1998*) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

$\boxed{\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}}$

14. (*МГУ, ВМК, 2008*) Решить неравенство

$$\sqrt{1-\sin 2x} + |\sin x| \leqslant \cos x.$$

$\boxed{\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}}$

15. (*«Ломоносов», 2013*) Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам:

$$x^2+y^2<\pi^2+t^2, \quad \cos y < 2+\cos 2x+(4\sin t-1)\cos x-\cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

$\boxed{\pi^3-2\pi^2}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2\sin x+3\cos x| + |\sin x-3\cos x| \leqslant 3\sin x$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

$\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{7}{9}}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Найдите минимальное натуральное число n, при котором система неравенств

$$\cos x \geqslant \cos\left(x+\frac{1}{8}\right) \geqslant \cos\left(x+\frac{2}{8}\right) \geqslant \ldots \geqslant \cos\left(x+\frac{n}{8}\right)$$

не имеет решений.

$\boxed{27}$

18. (*Всеросс., 2016, II этап, 11*) Решите неравенство

$$\sin\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x}\cos\frac{x}{x^2+1} > 0.$$

$\boxed{(0;+\infty)}$

19. (*ММО, 2014, 11*) Найдите все такие a и b, что $|a|+|b| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство

$$|a\sin x + b\sin 2x| \leqslant 1.$$

$\boxed{a=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}},\ b=\mp\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

20. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax\,?$$

Нет