

Тригонометрическая окружность

В предыдущей статье «[Углы в тригонометрии](#)» мы познакомились с углами произвольной величины и единицами их измерения. Сейчас мы обсудим важное соответствие, которое можно установить между углами и точками тригонометрической окружности. Это соответствие понадобится нам для того, чтобы впоследствии определить тригонометрические функции произвольного угла.

Тригонометрическая окружность — это окружность единичного радиуса на координатной плоскости OXY с центром в начале координат O (рис. 1).

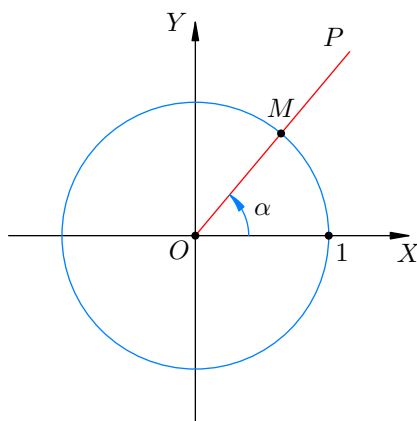


Рис. 1. Тригонометрическая окружность

Началом отсчёта углов (неподвижным лучом) служит положительная полуось OX . Подвижный луч OP пересекает тригонометрическую окружность в единственной точке M . Но каждое положение подвижного луча отвечает некоторому значению угла α . Поэтому ясно, что каждому значению угла α соответствует единственная точка тригонометрической окружности, которую удобно обозначить тем же символом α (рис. 2).

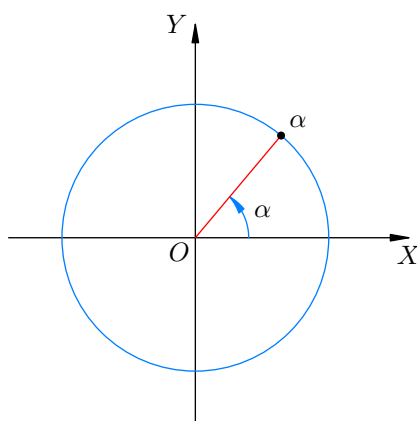


Рис. 2. Угол α и точка α

Итак, каждый угол однозначно определяет одноимённую точку тригонометрической окружности. Обратное оказывается неверным: точка тригонометрической окружности не определяет угол однозначно; каждой точке тригонометрической окружности отвечает бесконечное множество углов, отличающихся друг от друга на целое число полных оборотов подвижного луча в положительном или отрицательном направлении. Об этом мы поговорим подробнее чуть ниже.

А пока давайте отметим на тригонометрической окружности несколько точек, отвечающих некоторым важным углам. Начинаем с нулевого угла (точка 0 с координатами (1;0)) и идём против часовой стрелки с шагом, равным прямому углу (рис. 3).

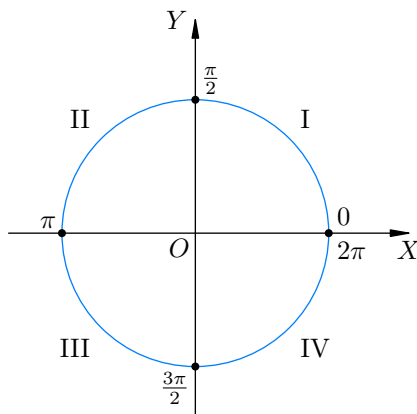


Рис. 3. $0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$

После первого шага попадаем в точку $\pi/2$, которая имеет координаты (0;1). Мы прошли *первую четверть* тригонометрической окружности (или, что то же самое, первую четверть координатной плоскости — римская цифра I на рисунке).

После второго шага попадаем в точку π с координатами (-1;0). Пройдена *вторая четверть* тригонометрической окружности (римская цифра II на рисунке).

После третьего шага попадаем в точку $3\pi/2$ с координатами (0;-1). Пройдена *третья четверть* тригонометрической окружности (римская цифра III на рисунке).

Наконец, после четвёртого шага мы проходим *четвёртую четверть* тригонометрической окружности (римская цифра IV на рисунке) и попадаем в точку 2π , которая совпадает с исходной точкой 0. Круг замкнулся.

Давайте сделаем ещё четыре таких же шага, то есть пятым, шестым, седьмым и восьмым по счёту. Мы пройдем по тем же геометрическим точкам, но только имена у этих точек окажутся другими: $5\pi/2$, 3π , $7\pi/2$ и 4π (рис. 4). Эти новые имена будут соответствовать всё возрастающим значениям угла, который отсчитывается с самого начала — с первого шага.

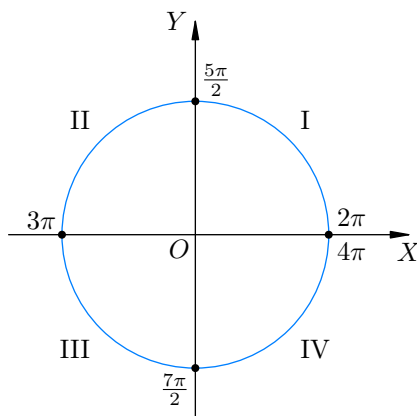


Рис. 4. $2\pi \rightarrow \frac{5\pi}{2} \rightarrow 3\pi \rightarrow \frac{7\pi}{2} \rightarrow 4\pi$

В результате этого небольшого «путешествия» устройство тригонометрической окружности становится понятным. Чтобы достичь ещё большей полноты картины, отправимся в сторону отрицательных углов.

Снова начнём с нулевого угла и сделаем четыре шага, равных прямому углу, в направлении по часовой стрелке (рис. 5). Мы последовательно попадём в точки $-\pi/2$, $-\pi$, $-3\pi/2$ и -2π ; последняя точка геометрически совпадает с исходной точкой 0.

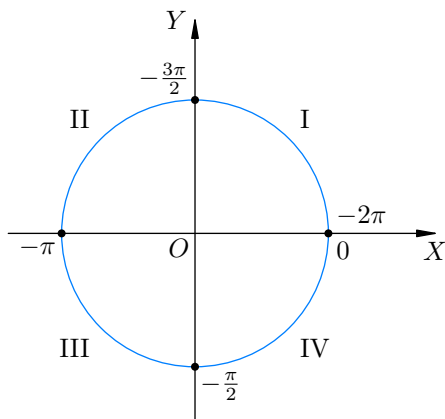


Рис. 5. $0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi \rightarrow -\frac{3\pi}{2} \rightarrow -2\pi$

Продолжим движение и сделаем ещё четыре таких же шага. Последовательно окажемся в точках $-5\pi/2$, -3π , $-7\pi/2$ и -4π (рис. 6).

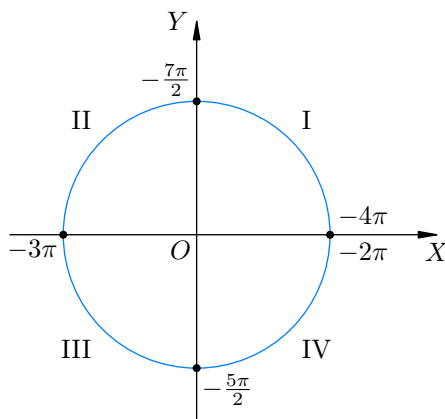


Рис. 6. $-2\pi \rightarrow -\frac{5\pi}{2} \rightarrow -3\pi \rightarrow -\frac{7\pi}{2} \rightarrow -4\pi$

Теперь, надеемся, ничего принципиально неясного на тригонометрической окружности для вас не осталось.

Мы уже убедились, что фиксированной точке тригонометрической окружности соответствует много углов. Как описать все эти углы? Начнём с простейшего случая — точки с координатами $(1; 0)$, отвечающей нулевому углу (рис. 7).

Как мы видели выше, эта точка отвечает не только углу 0, но и углам 2π , 4π , -2π , -4π . Ясно, что сюда же попадут углы $\pm 6\pi$, $\pm 8\pi$ и так далее. Все такие углы равны целому числу n полных углов 2π , и их можно записать простой формулой: $\alpha = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (напомним, что \mathbb{Z} есть множество целых чисел: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

Таким образом, точке с координатами $(1; 0)$, отвечающей нулевому углу, соответствует бесконечное множество углов; все эти углы имеют вид $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Данный факт как раз и отражён на рис. 7: рядом с точкой находится формула, описывающая все углы, этой точке соответствующие.

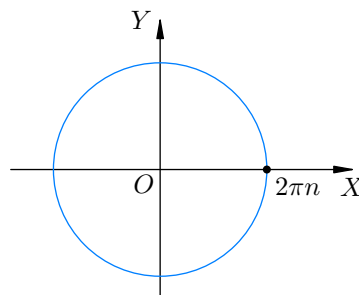


Рис. 7. Углы $2\pi n$

Теперь становится ясно, как описываются все углы, соответствующие произвольной точке тригонометрической окружности. Пусть некоторая точка тригонометрической окружности отвечает углу α_0 (рис. 8). Тогда любой угол α , соответствующий данной точке, отличается от α_0 на целое число полных углов: $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

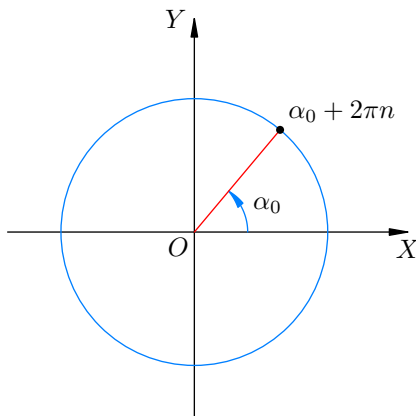


Рис. 8. Углы $\alpha_0 + 2\pi n$

В самом деле, отправляясь из точки α_0 и совершая целое число полных оборотов, мы всё время будем возвращаться в исходную точку, проходя таким образом все соответствующие углы.

Итак, рецепт прост и ясен: чтобы получить все углы, соответствующие данной точке тригонометрической окружности, нужно взять один из этих углов (неважно какой) и прибавить к нему $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

В заключение покажем, как описываются углы, соответствующие диаметральной паре точек (то есть паре точек, служащих концами диаметра окружности). Это понадобится нам впоследствии при решении тригонометрических уравнений.

Пусть α_0 — некоторый угол, соответствующий одной из точек диаметральной пары (рис. 9). Ясно тогда, что все интересующие нас углы α отличаются от α_0 на целое число развёрнутых углов: $\alpha = \alpha_0 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

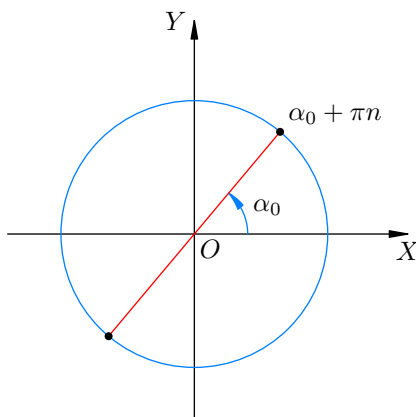


Рис. 9. Углы $\alpha_0 + \pi n$

В самом деле, отправляясь из точки α_0 и совершая целое число полуоборотов, мы всё время будем попадать в точки нашей диаметральной пары, проходя таким образом все соответствующие углы.

Итак: чтобы получить все углы, соответствующие диаметральной паре точек тригонометрической окружности, нужно взять один из этих углов (неважно какой) и прибавить к нему πn ($n \in \mathbb{Z}$).